COMVEST
Comissão Permanente para os Vestibulares

2011

vestibular nacional
UNICAMP

2ª Fase

Matemática

INTRODUÇÃO

A prova de matemática da segunda fase do vestibular da UNICAMP é elaborada de forma a identificar candidatos com boa capacidade de leitura de textos, tabelas e gráficos, bom raciocínio abstrato e domínio dos conteúdos matemáticos ministrados no ensino fundamental e no ensino médio. Não se deseja que o candidato decore centenas de fórmulas, mas que use seus conhecimentos e sua experiência para resolver questões que, frequentemente, abrangem mais de um tópico de matemática. Também se espera dos candidatos que resolvam questões relativas a assuntos de seu cotidiano, formulando modelos matemáticos que expressem corretamente os problemas apresentados.

Ao comentar a prova de matemática, tivemos a preocupação de apresentar estratégias alternativas de resolução das questões. Assim, sempre que um item vier acompanhado de um apóstrofo, como em **a'** ou **b'**, uma maneira diferente (e equivalente) de se obter a solução do problema é apresentada, com o intuito de enriquecer o aprendizado dos leitores. Outras formas de resolver os problemas aparecem nos exemplos acima da média reproduzidos neste caderno. Já os exemplos abaixo da média ilustram enganos comumente cometidos por estudantes do ensino médio. A esses exemplos, acrescentamos sugestões para que os candidatos evitem deslizes ao responder às questões.

Questão 13

Uma empresa imprime cerca de 12.000 páginas de relatórios por mês, usando uma impressora jato de tinta colorida. Excluindo a amortização do valor da impressora, o custo de impressão depende do preço do papel e dos cartuchos de tinta. A resma de papel (500 folhas) custa R$ 10,00. Já o preço e o rendimento aproximado dos cartuchos de tinta da impressora são dados na tabela abaixo.

Cartucho (cor/modelo)	Preço (R$)	Rendimento (páginas)
Preto BR	R$ 90,00	810
Colorido BR	R$ 120,00	600
Preto AR	R$ 150,00	2400
Colorido AR	R$ 270,00	1200

a) Qual cartucho preto e qual cartucho colorido a empresa deveria usar para o custo por página ser o menor possível?

b) Por razões logísticas, a empresa usa apenas cartuchos de alto rendimento (os modelos do tipo AR) e imprime apenas em um lado do papel (ou seja, não há impressão no verso das folhas). Se 20% das páginas dos relatórios são coloridas, quanto a empresa gasta mensalmente com impressão, excluindo a amortização da impressora? Suponha, para simplificar, que as páginas coloridas consomem apenas o cartucho colorido.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Quando se usa o cartucho Preto BR, o custo por página é igual a 90/810 = 1/9. Para o cartucho Preto AR, esse custo baixa para 150/2400 = 1/16. Como 1/16 < 1/9, o cartucho Preto AR é mais econômico.

Você também pode chegar a essa conclusão comparando os valores numéricos. Nesse caso, gasta-se cerca de R$ 0,11 por página usando o cartucho Preto BR, e cerca de R$ 0,06 por página com o cartucho Preto AR. Logo, o cartucho Preto AR é mais econômico.

Quando se usa o cartucho Colorido BR, o custo por página é igual a 120/600 = 1/5 = 8/40. Para o cartucho Colorido AR, esse custo sobe para 270/1200 = 9/40. Logo, o cartucho Colorido BR é mais econômico.

Nesse caso, fazendo-se as contas, chega-se a um custo de R$ 0,20 por página com o cartucho Colorido BR, e cerca de R$ 0,23 por página com o cartucho Colorido AR. Logo, o cartucho Colorido BR é mais econômico.

Resposta: Os cartuchos Preto AR e Colorido BR são os mais econômicos.

a')
Quando se usa o cartucho Preto BR, é possível imprimir 810/90 = 9 páginas por R$ 1,00. Com o cartucho Preto AR, imprimem-se 2400/150 = 16 páginas com R$ 1,00. Logo, o cartucho Preto AR é mais econômico.
Quando se usa o cartucho Colorido BR, é possível imprimir 600/120 = 5 páginas por R$ 1,00. Com o cartucho Colorido AR, imprimem-se 1200/270 = 40/9 ≈ 4,44 páginas com R$ 1,00. Logo, o cartucho Colorido BR é mais econômico.

Resposta: Os cartuchos Preto AR e Colorido BR são os mais econômicos.

a'')
Se o cartucho Preto BR imprime 810 páginas a R$ 90,00, então ele imprime 2400 páginas por 90x2400/810 ≈ R$ 266,67. Como esse valor é superior a R$150,00, o cartucho Preto AR é mais econômico.
Se o cartucho Colorido BR imprime 600 páginas por R$ 120,00, então ele imprime 1200 páginas por 120x1200/600 = R$240,00. Como esse valor é menor que R$ 270,00, o cartucho Colorido BR é mais econômico.

Resposta: Os cartuchos Preto AR e Colorido BR são os mais econômicos.

b) **(2 pontos)**
A empresa imprime 12000 páginas por mês, das quais 20% são coloridas. Assim, ela imprime 12000x4/5 = 9600 páginas usando apenas o cartucho preto e 2400 páginas coloridas, o que implica o consumo de 9600/2400 = 4 cartuchos do tipo Preto AR, e 2400/1200 = 2 cartuchos do tipo Colorido AR.
A empresa também gasta 12000/500 = 24 resmas de papel por mês. Logo, o custo de impressão, incluindo cartuchos e papel, é igual a 24x10 + 4x150 + 2x270 = 240 + 600 + 540 = R$ 1380,00.

Resposta: A empresa gasta mensalmente R$ 1380,00 com impressão.

Exemplo Acima da Média

Preto BR

a) 810 páginas ~~cartuchos Preto Br~~ – 90 reais
~~500 páginas " "~~ – x reais
$x = \frac{500 \cdot 90}{810} \cong 55{,}55$ reais

Preto AR

2.400 página ~~cartuchos Preto AR~~ - 150 reais
500 páginas – y reais
$y = \frac{500 \cdot 150}{2400} = 31{,}25$ reais

Colorido BR

600 páginas – 120 reais
500 " – z reais
z = 100 reais

Colorido AR

1200 páginas – 270 reais
500 " – t reais
$\frac{5 \cdot 270}{12} = 112{,}5$ reais = t

R: Melhores custo benefício serão cartucho Preto AR e colorido BR.

b) R$ Papel → $\frac{12000}{600} \cdot 10 = 240$ reais

R$ Colorido → $0{,}2 \cdot 12000 \cdot \frac{112{,}5}{500} = 540$ reais

R$ Preto → $0{,}8 \cdot 12000 \cdot \frac{31{,}25}{500} = 600$ reais

Total = 240 + 540 + 600
Total = 1380 reais

MATEMÁTICA

Exemplo Abaixo da Média

B a) Preto BR — Preto AR — colorido BR — colorido AR

R$ 90 — 810 pg — R$ 150 — 2400 pg — R$ 120 — 600 pg — R$ 270 — 1200

x — 500 pg — y — 500 pg — z — 500 pg — w — 500

x = R$ 55,50 — y = R$ 3,10 — z = R$ 100,00 — w = R$ 11,25

R. A empresa deve utilizar o cartucho Preto AR e o colorido AR

b) I 1200 pg — 100%
x — 20% → 240 pg — w
1200 pg — R$ 270
x = 240 pg coloridas — w = R$ 54,00

II 960 pg — z
2400 pg — R$ 150
z = R$ 60,00

III. 1200 pg · R$ 10,00 / 500 pg = R$ 24,00

Total gasto: 54 + 60 + 24 = 138 reais

Comentários

Essa é uma questão muito simples, cuja resolução exige apenas o conhecimento das operações aritméticas elementares, bem como a leitura correta do enunciado e da tabela. No exemplo acima da média, o candidato responde ao item **a** de uma forma diferente daquela que propusemos acima, supondo que serão impressas 500 páginas. De fato, qualquer número de páginas pode ser considerado, desde que o mesmo número seja usado para os cartuchos BR e AR.

No exemplo abaixo da média, o candidato também trabalha com 500 páginas, mas não percebe que a obtenção de números muito diferentes - como R$ 55,55 para o cartucho Preto BR e R$ 3,10 para o cartucho Preto AR - indica erro em alguma conta. Além disso, no item **b**, ele considera que a empresa imprime 1200 páginas por mês, em lugar de 12000, como afirma o enunciado. Erros de leitura e conta, particularmente na divisão, foram as maiores causas da perda de pontos nessa questão.

Questão 14

Uma grande preocupação atual é a poluição, particularmente aquela emitida pelo crescente número de veículos automotores circulando no planeta. Ao funcionar, o motor de um carro queima combustível, gerando CO_2, além de outros gases e resíduos poluentes.

a) Considere um carro que, trafegando a uma determinada velocidade constante, emite 2,7 kg de CO_2 a cada litro de combustível que consome. Nesse caso, quantos quilogramas de CO_2 ele emitiu em uma viagem de 378 km, sabendo que fez 13,5 km por litro de gasolina nesse percurso?

b) A quantidade de CO_2 produzida por quilômetro percorrido depende da velocidade do carro. Suponha que, para o carro em questão, a função c(v) que fornece a quantidade de CO_2, em g/km, com relação à velocidade v, para velocidades entre 20 e 40 km/h, seja dada por um polinômio do segundo grau. Determine esse polinômio com base nos dados da tabela abaixo.

Velocidade (km/h)	Emissão de CO_2 (g/km)
20	400
30	250
40	200

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Para determinar a emissão do carro nessa viagem, podemos recorrer à regra de três

$$\begin{array}{lcl} 13{,}5 \text{ km} & \rightarrow & 2{,}7 \text{ kg } CO_2 \\ 378 \text{ km} & \rightarrow & x \text{ kg } CO_2 \end{array}$$

que corresponde à equação

$$\frac{13{,}5}{378} = \frac{2{,}7}{x}.$$

Logo, x = 378.2,7/13,5 = 75,6.

Resposta: O carro emite 75,6 kg de CO_2 na viagem.

a') **(2 pontos)**
O carro gasta 378/13,5 = 28 litros de gasolina nessa viagem. Se ele emite 2,7 kg de CO_2 a cada litro de gasolina consumido, então são emitidos 28 x 2,7 = 75,6 kg de CO_2 na viagem.

Resposta: O carro emite 75,6 kg de CO_2 na viagem.

b) **(2 pontos)**
A função desejada tem a forma $c(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2$. Com base nos dados da tabela, temos

$$\begin{array}{lcllll} c(20) & = & a_0 & +20a_1 & +400a_2 & = & 400 \\ c(30) & = & a_0 & +30a_1 & +900a_2 & = & 250 \\ c(40) & = & a_0 & +40a_1 & +1600a_2 & = & 200 \end{array}$$

Subtraindo a primeira linha desse sistema linear das demais, obtemos

$$\begin{array}{llll} a_0 & +20a_1 & +400a_2 & = & 400 \\ & 10a_1 & +500a_2 & = & -150 \\ & 20a_1 & +1200a_2 & = & -200 \end{array}$$

Agora, somando à terceira linha a segunda linha multiplicada por –2, encontramos

$$\begin{array}{llll} a_0 & +20a_1 & +400a_2 & = & 400 \\ & 10a_1 & +500a_2 & = & -150 \\ & & +200a_2 & = & 100 \end{array}$$

Da terceira equação, concluímos que a_2 = 100/200 = 1/2. Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos a_1 = [–150 – 500x(1/2)]/10 = –40. Finalmente, da primeira equação, concluímos que a_0 = 400 – 20x(–40) – 400x(1/2) = 1000.

Resposta: A função é $c(v) = 1000 - 40v + v^2/2$.

Exemplo Acima da Média

a) 2,7 Kg de CO_2 ——— 13,5 Km ⟹ $\boxed{X = 75{,}6 \text{ Kg de } CO_2}$

X ——— 378 Km

b) $C(v) = a.v^2 + b.v + c$

• pelo gráfico, temos:

$$\begin{cases} 400.a + 20b + c = 400 \\ 900.a + 30b + c = 250 \\ 1600.a + 40b + c = 200 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 900 & 30 & 1 \\ 1600 & 40 & 1 \end{vmatrix}$$

$D = -2000$

$$D_a = \begin{vmatrix} 400 & 20 & 1 \\ 250 & 30 & 1 \\ 200 & 40 & 1 \end{vmatrix}$$

$D_a = -1000$

$$D_b = \begin{vmatrix} 400 & 400 & 1 \\ 900 & 250 & 1 \\ 1600 & 200 & 1 \end{vmatrix}$$

$D_b = 80000$

$$D_c = \begin{vmatrix} 400 & 20 & 400 \\ 900 & 30 & 250 \\ 1600 & 40 & 200 \end{vmatrix}$$

$D_c = -2\,000\,000$

$a = \frac{-1000}{-2000} = \frac{1}{2}$

$b = \frac{80\,000}{-2\,000} = -40$

$c = \frac{-2\,000\,000}{-2\,000} = 1000$

Assim,

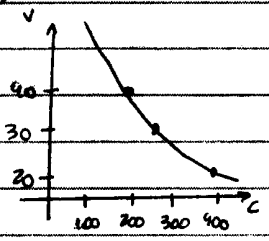
$C(v) = \frac{1}{2}v^2 - 40.v + 1000$

Exemplo Abaixo da Média

a) $378 \text{ Km} \cdot \frac{1 \text{ litro combustível}}{13{,}5 \text{ Km}} \cdot \frac{2{,}7 \text{ Kg de } CO_2}{1 \text{ litro combustível}} = 1890 \text{ Kg de } CO_2$

R: Ele emitiu 1890 Kg de CO_2 nessa viagem.

b) Trata-se de uma hipérbole



Comentários

O item **a** dessa questão requer apenas que se aplique uma regra de três. Assim, como era esperado, a maioria dos candidatos acertou o item. Entretanto, o exemplo abaixo da média mostra que, também nessa questão, os erros de conta foram frequentes, e que muitos não verificam se o valor obtido está dentro de limites razoáveis. Não é difícil notar que, mesmo no caso de o carro produzir 3 kg de CO_2 por quilômetro rodado (de fato, ele produz 2,7 kg a cada 13,5 km), não se atingiria, em uma viagem de menos de 400 km, os 1890 kg de CO_2 encontrados pelo candidato.

Por sua vez, o item **b** exige a formulação de um sistema linear com três equações e três incógnitas. Para resolver esse sistema, o candidato pode usar diversas estratégias, incluindo tanto o processo de eliminação apresentado acima como a regra de Cramer, empregada pelo aluno do exemplo acima da média. Entretanto, o uso da regra de Cramer não é indicado, já que exige muito trabalho. De fato, em virtude de seu pouco uso prático, essa regra nem precisaria ser ensinada no ensino médio.
O item **b** do exemplo abaixo da média mostra que nem todos os concluintes do ensino médio sabem distinguir uma hipérbole da curva associada a um polinômio do segundo grau. Dificuldades em resolver o sistema linear também foram comuns, bem como a troca entre coeficientes e variáveis do sistema.

Questão 15

O perfil lipídico é um exame médico que avalia a dosagem dos quatro tipos principais de gorduras (lipídios) no sangue: colesterol total (CT), colesterol HDL (conhecido como "bom colesterol"), colesterol LDL (o "mau colesterol") e triglicérides (TG). Os valores desses quatro indicadores estão relacionados pela fórmula de Friedewald: CT = LDL + HDL + TG/5. A tabela abaixo mostra os valores normais dos lipídios sanguíneos para um adulto, segundo o laboratório SangueBom.

Indicador	Valores normais
CT	Até 200 mg/dl
LDL	Até 130 mg/dl
HDL	Entre 40 e 60 mg/dl
TG	Até 150 mg/dl

a) O perfil lipídico de Pedro revelou que sua dosagem de colesterol total era igual a 198 mg/dl, e que a de triglicérides era igual a 130 mg/dl. Sabendo que todos os seus indicadores estavam normais, qual o intervalo possível para o seu nível de LDL?

b) Acidentalmente, o laboratório SangueBom deixou de etiquetar as amostras de sangue de cinco pessoas. Determine de quantos modos diferentes seria possível relacionar essas amostras às pessoas, sem qualquer informação adicional. Na tentativa de evitar que todos os exames fossem refeitos, o laboratório analisou o tipo sanguíneo das amostras, e detectou que três delas eram de sangue O+ e as duas restantes eram de sangue A+. Nesse caso, supondo que cada pessoa indicasse seu tipo sanguíneo, de quantas maneiras diferentes seria possível relacionar as amostras de sangue às pessoas?

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Se CT = 198 e TG = 130, então 198 = LDL + HDL +130/5, de modo que HDL = 172 – LDL. Como Pedro tem indicadores normais, seu HDL satisfaz as inequações $40 \leq HDL \leq 60$. Assim, temos $40 \leq 172 - LDL \leq 60$, ou seja, $-132 \leq -LDL \leq -112$, ou ainda, $112 \leq LDL \leq 132$.
Entretanto, como o valor do LDL não deve ultrapassar 130, concluímos que 112 mg/dl $\leq$ LDL $\leq$ 130 mg/dl.

Resposta: O nível de LDL de Pedro, em mg/dl, pertence ao intervalo [112, 130].

b) **(2 pontos)**
O número de maneiras de relacionar as amostras às pessoas é igual a $P_5 = 5! = 120$. Se 3 pessoas possuem sangue O+, então há $P_3 = 3! = 6$ maneiras de relacioná-las às amostras desse tipo sanguíneo. Além disso, há $P_2 = 2! = 2$ maneiras de relacionar as pessoas com sangue A+ às amostras correspondentes. Logo, existem $P_3.P_2 = 6.2 = 12$ modos de relacionar as pessoas às amostras de sangue.

Resposta: Sem informações adicionais, há 120 modos de relacionar as pessoas às amostras de sangue. Conhecendo o tipo sanguíneo, o número de maneiras diferentes cai para 12.

Exemplo Acima da Média

a) Sabendo-se que todos os indicadores de Pedro estavam normais, tem-se que o nível de HDL pode variar de 40 a 60 mg/dl. Assim, temos:

$CT = LDL + HDL + TG/5$

~~$CT_1 = LD$~~ $198 = LDL_1 + 40 + 130/5 \iff LDL_1 = 132$ mg/dl

$198 = LDL_2 + 60 + 130/5 \iff LDL_2 = 112$ mg/dl

Como os indicadores estavam normais, o intervalo possível para o nível de LDL de Pedro é de 112 mg/dl a 130 mg/dl.

b) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

Logo, seria possível relacionar as amostras às pessoas, sem informação adicional, de $\boxed{120}$ modos diferentes.

$\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{sangue O+}} \cdot \underbrace{2 \cdot 1}_{\text{sangue A+}} = 6 \cdot 2 = 12$

Logo, com a informação do tipo sanguíneo, seria possível relacionar as amostras de sangue às pessoas de $\boxed{12}$ maneiras diferentes.

Exemplo Abaixo da Média

a) pelo enunciado:

$CT = LDL + HDL + \frac{TG}{5}$

para HDL = 40 mg/dL

$198 = LDL + 40 + 26$

$LDL = 132$ mg/dL

Para HDL = 60 mg/dL

$198 = LDL + 60 + 26$

$LDL = 112$ mg/dL

Como todos os indicadores têm que ser normais o intervalo de LDL de Pedro é 112 mg/dL até 60 mg/dL

b) $P_{5!}^{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!}$

$P_{5!}^{3,2} = \frac{5 \cdot 4}{2}$

$P_{5!}^{3,2} = 10$ maneiras

R: De 10 maneiras distintas

Comentários

Essa questão, a terceira a incluir uma tabela, exige uma leitura particular dos dados, que aparecem na forma de intervalos. Como muitos candidatos não estão habituados à manipulação de desigualdades, um grande número deles resolveu o item **a** considerando em separado cada um dos limites de HDL, e trabalhando com igualdades, como mostra o exemplo acima da média. Essa estratégia está correta, mas exige que se verifique se cada um dos dois números obtidos é um limite inferior ou um limite superior para o nível de LDL. Naturalmente, nesse

momento, houve quem trocasse os extremos do intervalo. Além disso, alguns candidatos usaram apenas o valor médio do HDL, que era igual a 50 mg/dl, obtendo erroneamente um único valor para o nível de LDL. Mesmo assim, o desempenho dos vestibulandos nesse item foi muito bom.
No item **b**, o erro mais comum foi o cálculo das possibilidades usando soma em lugar de multiplicação. Além disso, alguns alunos não perceberam que era necessário considerar duas situações distintas, como mostra o exemplo abaixo da média, que também apresenta um terceiro erro frequente, decorrente do uso da fórmula errada para o cálculo das possibilidades.

Questão 16

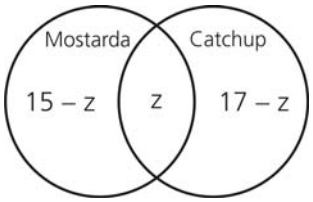
Um grupo de pessoas resolveu encomendar cachorros-quentes para o lanche. Entretanto, a lanchonete enviou apenas 15 sachês de mostarda e 17 de catchup, o que não é suficiente para que cada membro do grupo receba um sachê de cada molho. Desta forma, podemos considerar que há três subgrupos: um formado pelas pessoas que ganharão apenas um sachê de mostarda, outro por aquelas que ganharão apenas um sachê de catchup, e o terceiro pelas que receberão um sachê de cada molho.

a) Sabendo que, para que cada pessoa ganhe ao menos um sachê, 14 delas devem receber apenas um dos molhos, determine o número de pessoas do grupo.

b) Felizmente, somente 19 pessoas desse grupo quiseram usar os molhos. Assim, os sachês serão distribuídos aleatoriamente entre essas pessoas, de modo que cada uma receba ao menos um sachê. Nesse caso, determine a probabilidade de que uma pessoa receba um sachê de cada molho.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Denominemos z o número de pessoas que ganharão os dois sachês. Nesse caso, o número de pessoas que receberão apenas mostarda será igual a 15 – z. Por outro lado, 17 – z pessoas receberão apenas catchup. Portanto, (15 – z) + (17 – z) = 14 pessoas receberão apenas um sachê. Assim, 2z = 15 + 17 – 14 = 18, de modo que z = 9. Logo, o grupo é formado por 14 + z = 23 pessoas.



Resposta: O grupo é formado por 23 pessoas.

a')
O total de sachês a serem distribuídos é igual a 15 + 17 = 32. Subtraindo os 14 sachês destinados às pessoas que receberão apenas um molho, sobram 32 – 14 = 18 sachês. Como serão entregues dois desses sachês por pessoa, 18/2 = 9 pessoas ganharão os dois molhos. Desse modo, o grupo é formado por 14 + 9 = 23 pessoas.

Resposta: O grupo é formado por 23 pessoas.

a'')
Denominemos x o número de pessoas que receberão só o sachê de mostarda, y o número de pessoas que receberão apenas catchup e z o número de pessoas que ganharão os dois sachês. A partir dos dados do enunciado, concluímos que

$$\begin{aligned} x + y \quad &= 14 \\ x \quad + z &= 15 \\ y + z &= 17 \end{aligned}$$

Somando as três equações acima, obtemos 2x + 2y + 2z = 46, de modo que o grupo é formado por x + y + z = 23 pessoas. Observe que também é possível obter x, y e z resolvendo diretamente o sistema.

Resposta: O grupo é formado por 23 pessoas.

b) **(2 pontos)**

Se apenas 19 pessoas quiseram molho, então 19 – 17 = 2 delas receberão apenas mostarda, 19 – 15 = 4 receberão apenas catchup e 19 – 2 – 4 = 13 receberão os dois molhos.
Assim, a probabilidade de que uma pessoa receba os dois molhos é igual a 13/19.

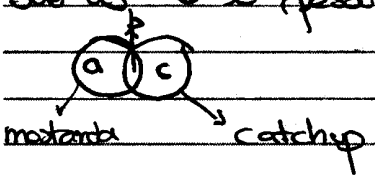
Resposta: A probabilidade de que uma pessoa receba os dois molhos é igual a 13/19.

b')
Seja z o número de pessoas que receberão dois sachês. Se apenas 19 pessoas quiseram molho, então 19 = (15 – z) + z + (17 – z) = 15 + 17 – z, donde z = 13.
Assim, a probabilidade de que uma pessoa receba os dois molhos é igual a 13/19.

Resposta: A probabilidade de que uma pessoa receba os dois molhos é igual a 13/19.

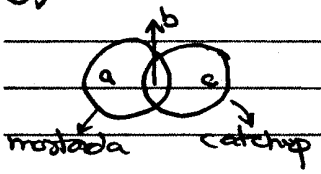
Exemplo Acima da Média

a) Pela representação a seguir supomos que as pessoas que receberão apenas mostarda são as 'a', pessoas que receberão apenas catchup são as 'c' e pessoas que receberão os dois sachês são as 'b', logo:



$$\begin{cases} a+b=15 \\ a+c=14 \\ b+c=17 \end{cases} \quad \begin{cases} a=6 & \text{(apenas mostarda)} \\ b=9 & \text{(catchup e mostarda)} \\ c=8 & \text{(apenas catchup)} \end{cases}$$

b) Sobre o mesmo raciocínio do item anterior temos que:



$$\begin{cases} a+b+c=19 \\ a+b=15 \\ b+c=17 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 & \text{(apenas mostarda)} \\ b=13 & \text{(catchup e mostarda)} \\ c=4 & \text{(apenas catchup)} \end{cases}$$

A probabilidade de que uma pessoa receba um sachê de cada é:

$$\frac{b}{a+b+c} = \frac{13}{18}$$

Exemplo Abaixo da Média

a) 15 sachês de mostarda, 17 sachês de catchup } 15 pessoas recebem um de cada e 2 recebem só 1 de catchup.

14 recebem 1 só, 2 receberam um de catchup, logo há mais 12 pessoas, num total de $\boxed{29 \text{ pessoas}}$.

b) $\boxed{C \mid M}$ 17 15 1 pessoa → $\frac{1}{17}$ C e $\frac{1}{15}$ M

$P = \frac{\text{nº casos favoráveis}}{\text{nº casos possíveis}} \Rightarrow P = \frac{1}{17} + \frac{1}{15} = \boxed{\frac{1}{32}}$

Comentários

Por ser relativamente simples, essa questão sobre conjuntos e probabilidade foi respondida por um grande número de candidatos. Entretanto, alguns tiveram dificuldade em interpretar os dados fornecidos e consideraram, por exemplo, que o número de molhos era igual ao número de pessoas (concluindo que o grupo era formado por 32 pessoas), ou que o número de pessoas que receberam só mostarda era igual ao daquelas que receberam apenas catchup (7 de cada). No item **b**, muitos tiveram dificuldade em definir probabilidade, obtendo até mesmo valores maiores que 1.

O exemplo acima da média apresenta uma resolução clara e simples. O candidato apenas não se lembrou de, ao final do item **a**, somar o número de componentes dos subgrupos.

Já o exemplo abaixo da média mostra uma estratégia errada, porém comum, na resolução do item **a**. Primeiramente, o candidato distribui os sachês de mostarda pelos membros do grupo. Em seguida, ao entregar os sachês de catchup, dá preferência às pessoas que já receberam mostarda. Com isso, 15 pessoas ficam com os dois molhos e 2 pessoas ficam só com catchup. Esquecendo-se de que todos os sachês foram distribuídos, o candidato nota que 12 pessoas ficaram sem molho, e entrega um sachê a cada uma (sem que se saiba como esses sachês foram obtidos), concluindo que 17 + 12 = 29 pessoas comeram cachorros-quentes.

No item **b** do exemplo abaixo da média, além de escrever a probabilidade como a soma de duas frações, o candidato também comete um erro comum de operação com frações. Afinal, será que $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a}{b+c}$ ou, pelo contrário, $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}$?

Questão 17

No mês corrente, uma empresa registrou uma receita de R$ 600 mil e uma despesa de R$ 800 mil. A empresa estuda, agora, alternativas para voltar a ter lucro.

a) Primeiramente, assuma que a receita não variará nos próximos meses, e que as despesas serão reduzidas, mensalmente, em exatos R$ 45 mil. Escreva a expressão do termo geral da progressão aritmética que fornece o valor da despesa em função de ***n***, o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente. Calcule em quantos meses a despesa será menor que a receita.

b) Suponha, agora, que a receita aumentará 10% a cada mês, ou seja, que a receita obedecerá a uma progressão geométrica (PG) de razão 11/10. Nesse caso, escreva a expressão do termo geral dessa PG em

função de ***n***, o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente. Determine qual será a receita acumulada em 10 meses. Se necessário, use $1,1^2 = 1,21$; $1,1^3 \approx 1,33$ e $1,1^5 \approx 1,61$.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

O termo geral da PA que representa a despesa tem a forma $a_n = 800000 - 45000(n - 1)$.

A despesa será menor que a receita quando $a_n < 600000$, ou seja, quando $845000 - 45000n < 600000$. Essa desigualdade é equivalente a $45000n > 45000$, que implica $n > 49/9 \approx 5,44$.

Resposta: A despesa será menor que a receita no sexto mês, ou seja, daqui a cinco meses.

b) **(2 pontos)**

O termo geral da PG que representa a receita é $a_n = 600000 \times (11/10)^{n-1} = 600000 \times 1,1^{n-1}$.

A receita acumulada em 10 meses é igual à soma dos termos da PG, que é dada pela fórmula

$$S_{10} = 600000\,\frac{(1,1^{10} - 1)}{(1,1 - 1)}.$$

Podemos escrever $1,1^{10} = 1,1^5 \cdot 1,1^5 \approx 1,61^2 \approx 2,59$. Assim, temos $S_{10} \approx 600000 \times 1,59 / 0,1 = 9540000$ reais.

Observação: outros valores podem ser obtidos usando-se aproximações diferentes para $1,61^2$. Adotamos o valor 2,59 em virtude de 1,61 ser a aproximação com duas casas decimais de $1,1^{10}$.

Resposta: A receita acumulada em 10 meses atingirá cerca de R$ 9 540 000.

Exemplo Acima da Média

a.) $D(n) = (800 - 45n) \cdot 1000$

↳ despesa em R$.

$(800 - 45n)\,1000 < 600 \cdot 1000$

$-45n < -200$

$n > 4,4$

$\boxed{\text{R. Em 5 meses}}$

b.) $R(n) = (600 \cdot 1,1^n) \cdot 1000$

$$S_{10} = \frac{600 \cdot 1000 \cdot (1 - 1,1^{10})}{1 - 1,1} = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot (1,61 \cdot 1,61 - 1)}{0,1}$$

$S_{10} \cong 6 \cdot 10^6 \cdot (2,6 - 1) \Rightarrow S_{10} \cong 9,6 \cdot 10^6$ reais

$\boxed{\text{R. 9 milhões e 600 mil}}$

Exemplo Abaixo da Média

a)

$a_n = a_1 + (n-1).r$

~~$a_n = 800 + (n-1).45$~~

~~$a_n = 800 + 45n - 45$~~

~~$a_n = 755 + 45n$~~

$a_n = a_1 + (n-1).r$

$a_n = 800.10^3 + (n-1).45.10^3$

$a_n = 45n.10^3 + 755.10^3$

Quando a despesa for de 600 mil

$600.10^3 = 45.10^3 n + 755.10^3$

$n = \frac{-155.10^3}{45.10^3} = -3,4$

$|n| = 3,4$ meses

A despesa será menor que a receita a partir do quarto mês

b) $a_n = a_1 + (q^n - 1)$

$a_{10} = 600.10^3 + (1,1^{10} - 1)$

$a_{10} = 600.10^3 + (1,1^5 . 1,1^3 . 1,1^2 - 1)$

Comentários

Nessa questão sobre progressões aritmética e geométrica, o desempenho dos candidatos foi considerado bom. Mesmo aqueles que não foram capazes de escrever os termos gerais das progressões conseguiram pontos resolvendo parcialmente os itens **a** e **b** através do cálculo explícito da receita ou despesa mês a mês. Nesse caso, entretanto, o tempo excessivo gasto nessa enumeração há de ter-lhes custado pontos em outras questões, já que a prova tem duração bastante limitada.

O exemplo acima da média mostra que também é possível resolver o item **a** da questão considerando **n** como o número de meses transcorridos a partir do mês corrente, ou seja, sem incluir o mês atual. Observe que o candidato obteve n > 4,4 (em lugar de 5,4), e concluiu corretamente que a despesa será menor que a receita daqui a cinco meses.

Já o candidato do exemplo abaixo da média errou o item **a** por considerar que a despesa cresce R$ 45.000 a cada mês, em lugar de decrescer. Dessa forma, só foi possível fazer a despesa atingir os 600.000 reais desejados considerando um valor negativo para **n**. Percebendo que isso não fazia sentido, o candidato preferiu simplesmente trocar o sinal da variável, em lugar de descobrir o erro, o que lhe custou os pontos do item.

No item **b**, esse mesmo candidato calculou apenas o termo a_n. Mesmo assim, confundiu-se ao escrevê-lo, usando uma soma em lugar de um produto.

Questão 18

Define-se como ponto fixo de uma função *f* o número real *x* tal que *f*(*x*) = *x*. Seja dada a função

$$f(x) = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)} + 1.$$

a) Calcule os pontos fixos de f(x).

b) Na região quadriculada abaixo, represente o gráfico da função f(x) e o gráfico de g(x) = x, indicando explicitamente os pontos calculados no item (a).

MATEMÁTICA

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Reformulando a equação f(x) = x, obtemos

$$\frac{1}{(x+1/2)} = x - 1.$$

Supondo que $x \neq -1/2$, isso equivale a $(x + 1/2)(x - 1) = 1$, ou simplesmente $x^2 - x/2 - 3/2 = 0$.

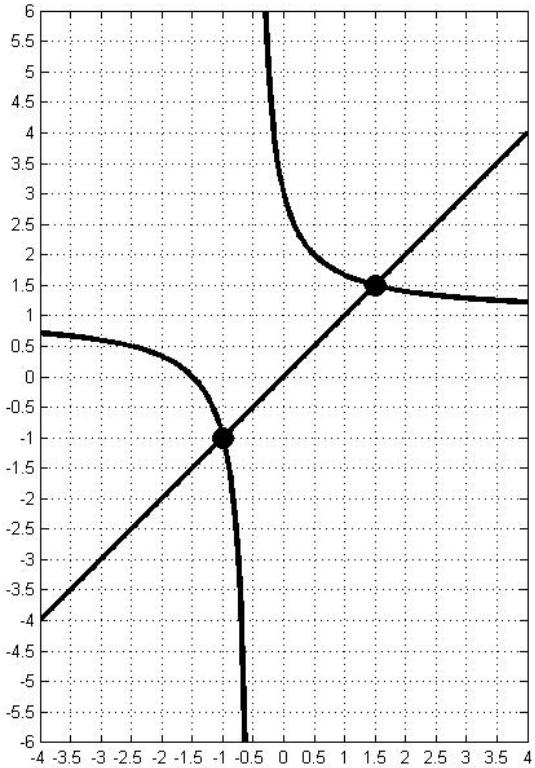
Usando a fórmula de Báskara, temos

$$x = \left(1/2 \pm \sqrt{(1/2)^2 - 12/2}\right)/2 = [(1/2) \pm (5/2)]/2.$$

Logo, as raízes são $x_1 = 3/2$ e $x_2 = -1$, que são os pontos fixos de f(x).

Resposta: Os pontos fixos são $x_1 = 3/2$ e $x_2 = -1$.

b) **(2 pontos)**
Os gráficos de f(x) e de g(x) são dados ao lado. Os pontos marcados sobre o eixo x são aqueles calculados no item (a).



Exemplo Acima da Média

a-) $\frac{1}{\frac{x+1}{2}} + 1 = x \Rightarrow \frac{1}{\frac{2x+1}{2}} + 1 = x$

$\frac{2}{2x+1} + 1 = x \Rightarrow 2 + 2x + 1 = x(2x+1)$

$2 + 2x + 1 = 2x^2 + x$

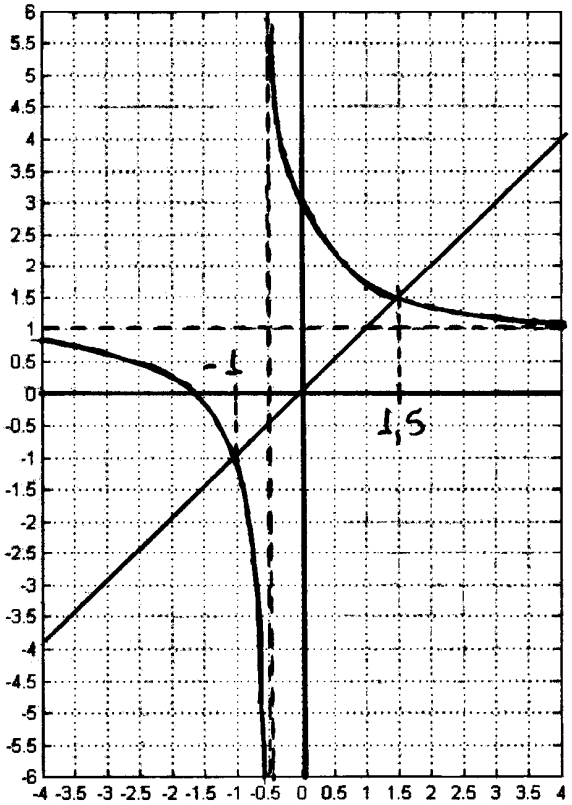
$2x^2 + x - 2x - 3 = 0$

$2x^2 - x - 3 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$

$x = \frac{1 \pm 5}{4} \rightarrow x' = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$\rightarrow x'' = -1$



MATEMÁTICA

Exemplo Abaixo da Média

a) Sendo $f(x) = x$; temos:

$$\frac{1}{\frac{2x+1}{2}} + 1 = x \qquad x' = \frac{+2+5}{4} = \frac{3}{2}$$

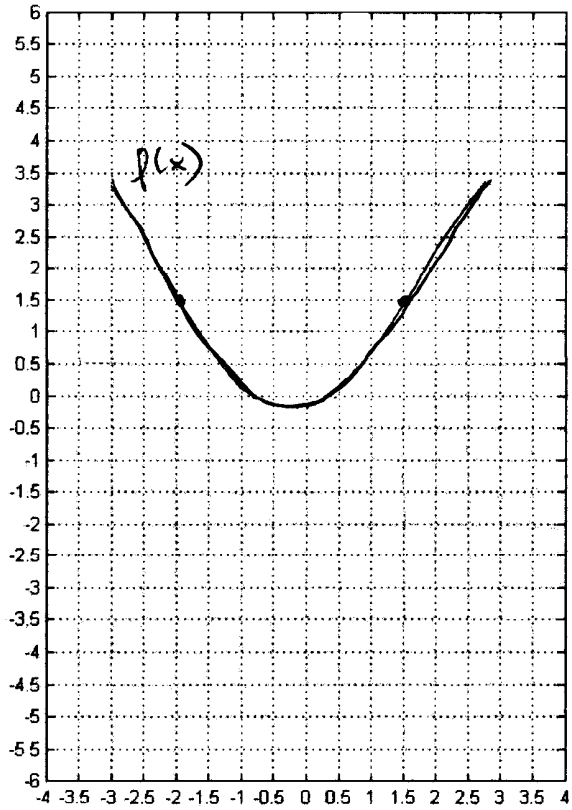
$$\frac{1 + \frac{2x+1}{2}}{\frac{2x+2}{2}} = x \qquad x'' = \frac{+1-5}{2} = -2$$

$$\frac{\frac{2x+3}{2}}{\frac{2x+1}{2}} = x$$

$$\frac{2x+3}{2x+1} = x$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Delta = 25$$



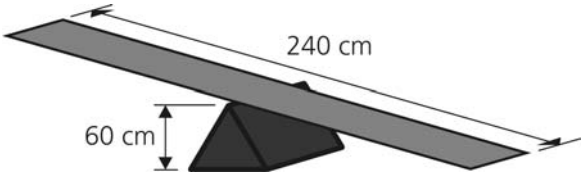
Comentários

Essa questão tem dois itens com dificuldades distintas. O item **a**, apesar de envolver uma função aparentemente complexa, pode ser considerado relativamente fácil, pois requer apenas a determinação das raízes de uma equação do segundo grau. Erros frequentes nesse item incluem a interpretação errada da definição de ponto fixo dada no enunciado, bem como erros de contas na obtenção das raízes, como o cometido pelo candidato do exemplo abaixo da média. Cabe sempre lembrar que, depois de obtidas as raízes de uma equação qualquer, é fácil verificar se elas estão corretas substituindo-as na própria equação.

O item **b** é muito mais difícil, pois envolve o traçado de uma hipérbole deslocada. Assim, o desempenho dos alunos nesse item não foi tão bom, sendo poucos os que foram capazes de representar corretamente as duas funções, como fez o candidato do exemplo acima da média. Muitos confundiram a função f(x) com o polinômio usado no item **a** para encontrar os pontos fixos, e traçaram uma parábola, como se vê no exemplo abaixo da média. Retas e curvas lineares por partes também foram representações frequentes de f(x).

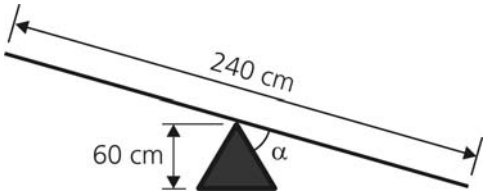
Questão 19

Considere uma gangorra composta por uma tábua de 240 cm de comprimento, equilibrada, em seu ponto central, sobre uma estrutura na forma de um prisma cuja base é um triângulo equilátero de altura igual a 60 cm, como mostra a figura. Suponha que a gangorra esteja instalada sobre um piso perfeitamente horizontal.



a) Desprezando a espessura da tábua e supondo que a extremidade direita da gangorra está a 20cm do chão, determine a altura da extremidade esquerda.

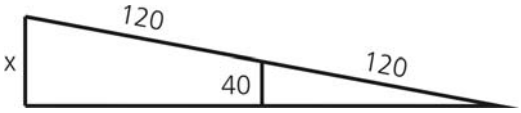
b) Supondo, agora, que a extremidade direita da tábua toca o chão, determine o ângulo α formado entre a tábua e a lateral mais próxima do prisma, como mostra a vista lateral da gangorra, exibida abaixo.



Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

O centro da tábua está sempre a 60 cm do chão. Se o extremo direito dessa tábua está a 20 cm do chão, então a diferença de altura entre o extremo direito e o centro da tábua é igual a 40 cm, como mostra a figura abaixo.

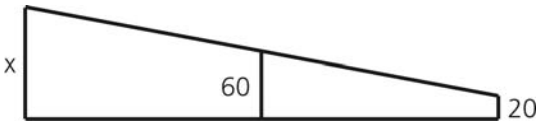


Considerando que uma metade da tábua tem 120 cm de comprimento e usando semelhança de triângulos, constatamos que a diferença de altura entre as extremidades da tábua, que denominamos x, pode ser obtida a partir da equação x/40 = 240/120. Daí, x = 80 cm, de modo que a extremidade esquerda da tábua está a 80 + 20 = 100 cm do chão.

Resposta: A extremidade esquerda da gangorra está a 1 m do chão.

a')

O centro da tábua está sempre a 60 cm do chão. Essa distância corresponde à base média do trapézio cujos vértices são as extremidades da tábua e suas projeções verticais sobre o solo, como mostra a figura abaixo.

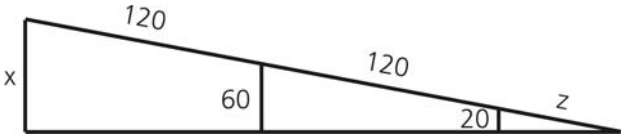


Se o extremo direito da tábua está a 20 cm do chão, então (x + 20)/2 = 60. Desse modo, x + 20 =120, ou simplesmente x = 100 cm.

Resposta: A extremidade esquerda da gangorra está a 1 m do chão.

a'')

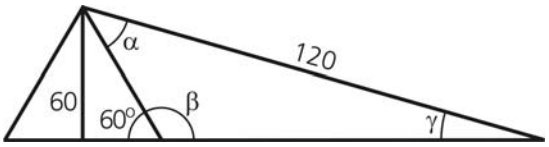
A figura abaixo mostra o triângulo obtido pelo prolongamento do segmento de reta que representa a tábua, até que ele encontre a linha horizontal que representa o chão.



Usando semelhança de triângulos, obtemos 60/20 = (120 + z)/z. Logo, 3z = 120 +z, ou seja, z = 120/2 = 60 cm. Recorrendo, novamente, à propriedade da semelhança de triângulos, concluímos que x/20 = (120 + 120 + z)/z. Assim, x/20 = 300/60, de modo que x = 100 cm

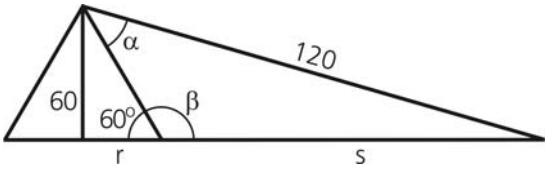
Resposta: A extremidade esquerda da gangorra está a 1 m do chão.

b) **(2 pontos)**
O triângulo formado pela metade direita da tábua, pela lateral da base e pelo chão tem ângulos internos α, β e γ, como mostra a figura abaixo, que representa o lado direito da gangorra. Da figura, concluímos que $\beta = 180° - 60° = 120°$. Além disso, $\text{sen}(\gamma) = 60/120 = 1/2$. Logo, $\gamma = 30°$, de modo que $\alpha = 180° - 120° - 30° = 30°$.



Resposta: O ângulo α mede 30°.

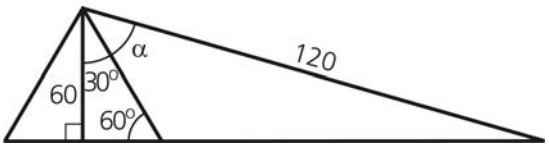
b')
O triângulo da base da gangorra é equilátero e tem altura 60 cm, como mostra a figura abaixo, na qual se vê a metade direita da gangorra.



Para determinar a metade do comprimento da aresta da base da gangorra, usamos o teorema de Pitágoras, que diz que $(2r)^2 = 60^2 + r^2$, ou seja, $r = \sqrt{60^2/3} = 60/\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$ cm. Além disso, o triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 120 cm (metade do comprimento da tábua) tem catetos de comprimento 60 cm e $(s + r)$. Usando novamente o teorema de Pitágoras, obtemos $120^2 = 60^2 + (r + s)^2$, de modo que $r + s = \sqrt{120^2 - 60^2} = \sqrt{14400 - 3600} = \sqrt{10800} = 60\sqrt{3}$ cm. Assim, $s = 60\sqrt{3} - 20\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$ cm.
Usando, agora, a lei dos senos e observando que $\beta = 180° - 60° = 120°$, temos $\text{sen}(\alpha)/40\sqrt{3} = \text{sen}(\beta)/120 = \text{sen}(120°)/120 = \sqrt{3}/240$. Logo, $\text{sen}(\alpha) = 40(\sqrt{3})^2/240 = 120/240 = 1/2$, de modo que $\alpha = 30°$.

Resposta: O ângulo α mede 30°.

b'')
O triângulo da base da gangorra é equilátero e tem altura 60 cm, como mostra a figura abaixo, na qual se vê a metade direita da gangorra.

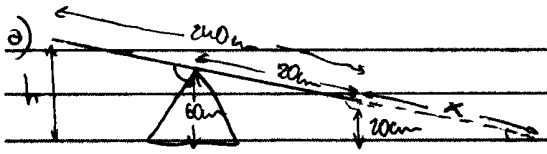


A partir do triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 120 cm e que tem um cateto com 60 cm de comprimento, concluímos que $\cos(30° + \alpha) = 60/120 = 1/2$. Logo, $30° + \alpha = 60°$, de modo que $\alpha = 30°$.

Resposta: O ângulo α mede 30°.

Exemplo Acima da Média

a)



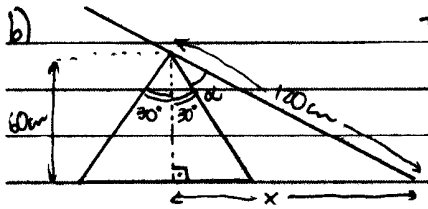
Semelhança de triângulos: $\frac{x}{20} = \frac{120+x}{60} = \frac{240+x}{h}$

$x = 60cm$

$\frac{x}{20} = \frac{240+x}{h}$

$3 = \frac{300}{h} \rightarrow \boxed{h = 100cm}$

b)



T. Pitágoras: $(120)^2 = (60)^2 + x^2$

$x = \sqrt{10800} = 60\sqrt{3}$ cm

$tg(30° + \alpha) = \frac{x}{60} = \frac{60\sqrt{3}}{60} = \sqrt{3}$

$tg(30° + \alpha) = tg\, 60°$

$30° + \alpha = 60°$

$\boxed{\alpha = 30°}$

Exemplo Abaixo da Média

a) Se a extremidade direita está a 20 cm do chão, a esquerda está a 80 cm

b) $\alpha = \frac{CO}{hip} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

$\alpha = 60°$

Comentários

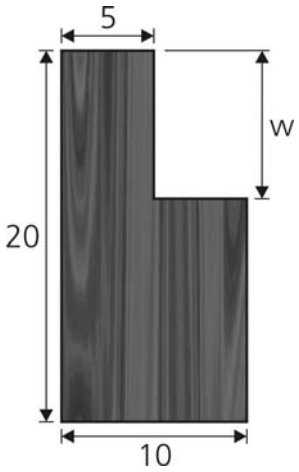
A compreensão do enunciado é a chave para a solução dessa questão de geometria e trigonometria. Em geral, os candidatos conseguiram formular e resolver corretamente ao menos o item **a**, de modo que o desempenho geral na questão foi bom.

Como em toda questão desse tipo, existem muitas formas alternativas de resolução dos dois itens. No item **b**, por exemplo, era possível usar o teorema de Pitágoras em conjunto com a tangente de 30° + α, como fez o candidato do exemplo acima da média.

O exemplo abaixo da média ilustra alguns dos erros mais cometidos pelos candidatos. No item **a**, o aluno conclui que a extremidade esquerda da gangorra está a uma altura de 80 cm, provavelmente por ter-se esquecido de somar os 20 cm que separam a extremidade direita do chão. No item **b**, esse mesmo candidato supõe que o ângulo de medida α é aquele formado entre a tábua e a reta vertical que divide ao meio a base da gangorra. Além disso, confunde α com sen(α), pois escreve α = 1/2 e, logo em seguida, conclui (erroneamente) que α = 60°.

Questão 20

Uma placa retangular de madeira, com dimensões 10 x 20 cm, deve ser recortada conforme mostra a figura ao lado. Depois de efetuado o recorte, as coordenadas do centro de gravidade da placa (em função da medida w) serão dadas por



$$x_{CG}(w) = \frac{400 - 15w}{80 - 2w} \quad \text{e} \quad y_{CG}(w) = \frac{400 + (w - 20)^2}{80 - 2w},$$

em que x_{CG} é a coordenada horizontal e y_{CG} é a coordenada vertical do centro de gravidade, tomando o canto inferior esquerdo como a origem.

a) Defina A(w), a função que fornece a área da placa recortada em relação a w. Determine as coordenadas do centro de gravidade quando A(w) = 150 cm^2.

b) Determine uma expressão geral para $w(x_{CG})$, a função que fornece a dimensão w em relação à coordenada x_{CG}, e calcule y_{CG} quando x_{CG} = 7/2 cm.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Quando w = 0, a área é igual a 20×10 = 200 cm^2. A cada aumento de 1 cm em w, há uma redução de 5 cm^2 na área. Assim, temos A(w) = 200 – 5w.

Quando A(w) = 150, temos 200 – 5w = 150, ou seja, w = 50/5 = 10 cm. Nesse caso,

$$x_{CG}(w) = \frac{400 - 15.10}{80 - 2.10} = \frac{250}{60} = \frac{25}{6} \quad \text{e} \quad y_{CG}(w) = \frac{400 + (10 - 20)^2}{80 - 2.10} = \frac{500}{60} = \frac{25}{3}.$$

Resposta: As coordenadas são x_{CG} = 25/6 cm e y_{CG} = 25/3 cm.

b) **(2 pontos)**

Observamos que $(80 - 2w) \cdot x_{CG} = 400 - 15w$. Logo, $(15 - 2x_{CG})w = 400 - 80x_{CG}$, ou seja, $w(x_{CG}) = (400 - 80x_{CG})/(15 - 2x_{CG})$.

Se x_{CG} = 7/2, então w(7/2) = (400 – 80.7/2)/(15 – 2.7/2) = (400 – 280)/(15 – 7) = 120/8 = 15.

Assim, $y_{CG}(15) = [400 + (15 - 20)^2]/[80 - 2.15] = 425/50 = 17/2 = 8{,}5$ cm.

Resposta: A expressão geral da função é $w(x_{CG}) = (400 - 80x_{CG})/(15 - 2x_{CG})$. Quando a coordenada x_{CG} é igual a 7/2 cm, a coordenada y_{CG} mede 17/2 cm (ou 8,5 cm).

Exemplo Acima da Média

a) $A_w = (20-w).10 + 5.w$

$A_w = 200 - 10w + 5w \longrightarrow \boxed{A(w) = 200 - 5w}$

$A(w) = 150\ cm^2$

$200 - 5w = 150$

$w = 10$

$x_{CG}(w) = \dfrac{400-15w}{80-2w} = \dfrac{400-15.10}{80-2.10} = \dfrac{25}{6}$

$y_{CG}(w) = \dfrac{400+(w-20)^2}{80-2w} = \dfrac{400+(10-20)^2}{80-2.10} = \dfrac{25}{3}$

resp: $\boxed{CG\left(\dfrac{25}{6}; \dfrac{25}{3}\right)}$

b) $x_{CG} = \dfrac{7}{2}\ cm \longrightarrow \dfrac{400-15w}{80-2w} = \dfrac{7}{2} \longrightarrow 800-30w = 560-14w$

$w = 15$

$y_{CG}(w) = \dfrac{400+(w-20)^2}{80-2w} = \dfrac{400+(15-20)^2}{80-2.15} = \dfrac{425}{50} = \boxed{\dfrac{17}{2}}$

Exemplo Abaixo da Média

$A(A(w)) = 5w$

$150 = 5w$

$w = 30$

$x = \dfrac{400-15.30}{80-2.30} = \dfrac{400-450}{80-60} = \dfrac{-50}{20} = -2,5$

$y = \dfrac{400+(30-20)^2}{80-2.3} = \dfrac{400+100}{20} = \dfrac{500}{20} = 25$

R: $A(w) = 5w$

$x_{CG} = -2,5\ cm$

$y_{CG} = 25\ cm$

B) $y_{CG} = ?$

$x = \dfrac{7}{2}$

$\dfrac{7}{2} = \dfrac{400-15w}{80-2w}$

$560 - 14w = 800 - 30w$

$-14w + 30w = 800 - 560$

$16w = 240$

$w = \dfrac{240}{16}$

$\boxed{w = 15}$

$y = \dfrac{400+(15-20)^2}{80-2.15}$

$y = \dfrac{400-25}{50}$

$y = \dfrac{375}{50} = 7,5$

R: $y_{CG} = 7,5\ cm$

Comentários

O item **a** dessa questão envolve a definição de uma função simples, e o cálculo de duas frações. Ainda assim, muitos candidatos não obtiveram os valores desejados, quer por não terem escrito A(w) corretamente, quer por terem errado em contas (ao elevar ao quadrado um número negativo, ou ao simplificar as frações, ou mesmo na conversão das frações à forma decimal). No exemplo abaixo da média, o candidato obtém A(w) = 5w, e calula as coordenadas do centro de gravidade a partir dessa fórmula errada, obtendo x_{CG} menor que zero e y_{CG} maior que a altura da placa.

No item **b**, é preciso definir a função inversa de $x_{CG}(w)$ e usá-la para calcular y_{CG}. Embora a obtenção de $w(x_{CG})$ não fosse tarefa fácil, muitos candidatos foram capazes de calcular corretamente ao menos a coordenada y_{CG}, como mostra o exemplo acima da média. Tentando fazer o mesmo, o candidato do exemplo abaixo da média calcula w = 15 com sucesso, mas erra a resposta por considerar que $(-5)^2 = -25$.

Questão 21

Para certo modelo de computadores produzidos por uma empresa, o percentual dos processadores que apresentam falhas após T anos de uso é dado pela seguinte função:

$$P(T) = 100(1 - 2^{-0,1T})$$

a) Em quanto tempo 75% dos processadores de um lote desse modelo de computadores terão apresentado falhas?

b) Os novos computadores dessa empresa vêm com um processador menos suscetível a falhas. Para o modelo mais recente, embora o percentual de processadores que apresentam falhas também seja dado por uma função na forma $Q(T) = 100(1 - 2^{cT})$, o percentual de processadores defeituosos após 10 anos de uso equivale a 1/4 do valor observado, nesse mesmo período, para o modelo antigo (ou seja, o valor obtido empregando-se a função P(T) acima). Determine, nesse caso, o valor da constante c. Se necessário, utilize $\log_2(7) \approx 2,81$.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Queremos determinar o instante T tal que P(T) = 75. Nesse caso, temos $75 = 100(1 - 2^{-0,1T})$, de modo que $0,75 = 1 - 2^{-0,1T}$, ou $2^{-0,1T} = 0,25 = 1/4 = 2^{-2}$. Logo, –0,1T = –2, ou seja, T = 20 anos.

Resposta: Em 20 anos, 75% dos processadores apresentarão falhas.

b) **(2 pontos)**

Para T = 10, temos Q(10) = P(10)/4 = $100(1 - 2^{-1})/4 =$ 100/8. Assim, $100(1 - 2^{10c}) = 100/8$, de modo que $2^{10c} = 7/8$. Aplicando o logaritmo na base 2 aos dois lados da equação, obtemos $10c = \log_2(7) - 3$. Logo, c = (2,81 – 3)/10 = –0,019.

Resposta: A constante c vale –0,019.

Exemplo Acima da Média

$P(T) = 100(1 - 2^{-0,1.T})$

a) $75 = 100 - 2^{-0,1.T} \cdot 10^2$

$5^2 = 10^2 \cdot \frac{1}{2^{0,1.T}} \rightarrow \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{0,1T}} \rightarrow 2 = 0,1.T$

$\boxed{T = 20 \text{ anos}}$

para $T = 10$ anos

b) $Q(T) = 100(1 - 2^{10c})$

$P(T) = 100\left(1 - \frac{1}{2^1}\right) = 50\%$

$\frac{\cancel{50}}{4} = \cancel{100}^{2}(1 - 2^{10c}) \rightarrow \frac{1}{4} = 2 - 2^{10c+1} \rightarrow \frac{7}{4} = 2^{10c+1}$

$0,81 = 10c + 1$

$\boxed{c = -0,019}$

Exemplo Abaixo da Média

a) $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \therefore \frac{3}{4} = 100(1 - 2^{-0,1T}) \rightarrow 3 = 400(1 - 2^{-0,1T})$

b) Igualando as duas funções $Q(T)$ e $P(T)$ obtém-se:

$100(1 - 2^{cT}) = 100(1 - 2^{-0,1T}) \rightarrow 100(1 - 2^{10c}) = \frac{1}{4}[100.(1 - 2^{-0,1.10})] \rightarrow$

$100(1 - 2^{10c}) = \frac{1}{4}[100(1 - 2^{-1})] \rightarrow 100 - 100 \cdot 2^{10c} = \frac{1}{4}(\overset{50}{100} - 50) \rightarrow$

$100 - 100.2^{10c} = \frac{50}{4} \rightarrow -100.2^{10c} = \frac{50}{4} - 100 \rightarrow -400.2^{10c} = 50 - 400 \rightarrow -400.2^{10c} = -350 \rightarrow$

$2^{10c} = \frac{350}{400} \rightarrow 2^{10c} = \frac{7}{8} \rightarrow \log_2 2^{10c} = \frac{\log_2 7}{\log_2 8} \rightarrow 10c = \frac{2,81}{3} \rightarrow 30c = 2,81 \rightarrow$

$\boxed{c = \frac{2,81}{30}}$ Portanto, o valor da constante c é igual a $\frac{2,81}{30}$.

Comentários

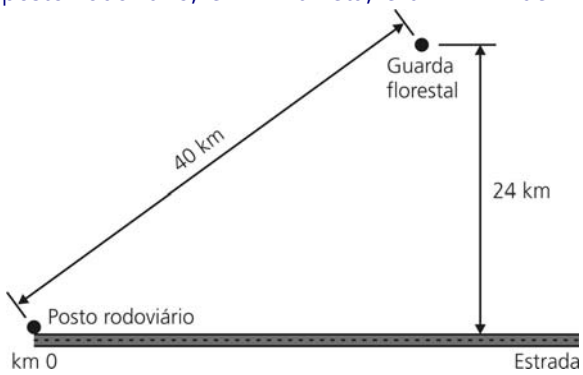
Essa questão tem o objetivo de verificar se os candidatos são capazes de reescrever números como potências de uma base fixa, de manipular expoentes e de aplicar corretamente as regras dos logaritmos. Embora a questão tenha um formato clássico, observa-se que a combinação de frações, expoentes e logaritmos causa dificuldades aos alunos do ensino médio.

Um erro muito comum no item **a** aparece na prova do exemplo abaixo da média. Nela o candidato converte 75% em 3/4, e tenta prosseguir, sem obter sucesso. Observe-se que, aplicando essa conversão incorreta de porcentagem em fração, é possível determinar um instante no qual mais que 100% dos processadores apresentam falhas, o que não faz sentido (se o leitor tiver curiosidade, pode usar uma calculadora para determinar o valor de T tal que P(T) = 1).

No exemplo acima da média, apesar de o candidato não detalhar todos os passos da resolução dos dois itens, é possível concluir que ele sabe manipular corretamente logaritmos e potências.

Questão 22

Suponha um trecho retilíneo de estrada, com um posto rodoviário no quilômetro zero. Suponha, também, que uma estação da guarda florestal esteja localizada a 40 km do posto rodoviário, em linha reta, e a 24 km de distância da estrada, conforme a figura ao lado.



a) Duas antenas de rádio atendem a região. A área de cobertura da primeira antena, localizada na estação da guarda florestal, corresponde a um círculo que tangencia a estrada. O alcance da segunda, instalada no posto rodoviário, atinge, sem ultrapassar, o ponto da estrada que está mais próximo da estação da guarda florestal. Explicite as duas desigualdades que definem as regiões circulares cobertas por essas antenas, e esboce essas regiões no gráfico abaixo, identificando a área coberta simultaneamente pelas duas antenas.

b) Pretende-se substituir as antenas atuais por uma única antena, mais potente, a ser instalada em um ponto da estrada, de modo que as distâncias dessa antena ao posto rodoviário e à estação da guarda florestal sejam iguais. Determine em que quilômetro da estrada essa antena deve ser instalada.

Resposta Esperada

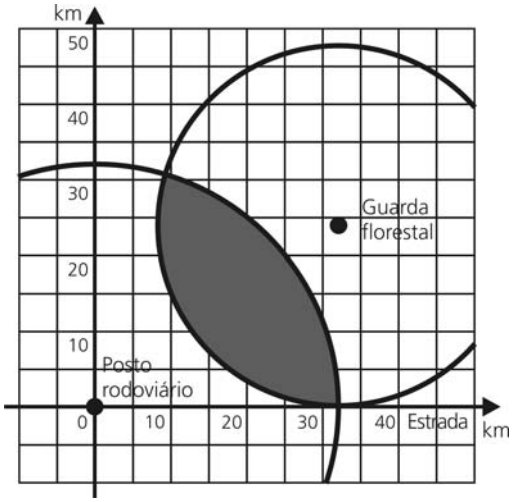
a) **(2 pontos)**

O ponto da estrada mais próximo da guarda florestal está no quilômetro $\sqrt{40^2 - 24^2} = \sqrt{1024} = 32$.

A fórmula geral de um círculo centrado em (x_0, y_0) e com raio r é $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$. Como a primeira antena está centrada na estação da guarda florestal e seu sinal atinge (mas não ultrapassa) o ponto da estrada calculado acima, temos $(x_0, y_0) = (32,24)$ e r = 24. Assim, a área de cobertura da primeira antena é dada por $(x - 32)^2 + (y - 24)^2 \leq 24^2$.

Como a segunda antena está instalada no posto rodoviário e seu sinal também alcança, sem ultrapassar, o ponto (32, 0), temos $(x_0, y_0) = (0,0)$ e r = 32. Logo, a área de cobertura dessa antena é dada por $x^2 + y^2 \leq 32^2$.

As regiões cobertas pelas antenas estão representadas no gráfico abaixo.

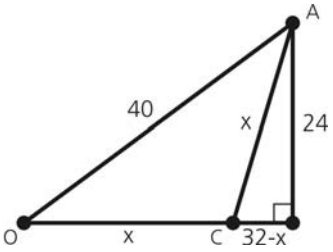


Resposta: As regiões de cobertura das antenas são dadas por $(x - 32)^2 + (y - 24)^2 \leq 24^2$ e $x^2 + y^2 \leq 32^2$. Essas regiões estão representadas na figura acima. A região mais escura é aquela coberta simultaneamente pelas duas antenas.

b) **(2 pontos)**
Queremos encontrar um ponto na forma (x,0) tal que sua distância em relação aos pontos (0,0) e (32,24) seja a mesma. Assim, $(x-0)^2 + (0-0)^2 = (x-32)^2 + (0-24)^2$.
Reescrevendo essa equação, obtemos $x^2 = x^2 - 64x + 1024 + 576$, de modo que x = 1600/64 = 25.

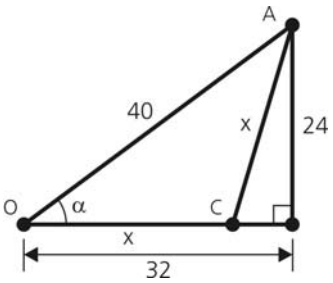
Resposta: A antena deve ser instalada no quilômetro 25 da estrada.

b')
Na figura ao lado, que ilustra o problema, os pontos O, A e C representam, respectivamente, o posto rodoviário, a estação da guarda florestal e o ponto de instalação da nova antena.
Usando o teorema de Pitágoras, obtemos $x^2 = (32-x)^2 + 24^2$, ou seja, $x^2 = x^2 - 64x + 1024 + 576$. Desse modo, x = 1600/64 = 25.



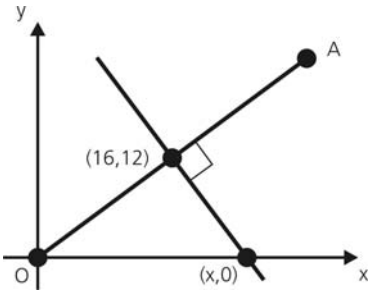
Resposta: A antena deve ser instalada no quilômetro 25 da estrada.

b'')
Na figura ao lado, que ilustra o problema, os pontos O, A e C representam, respectivamente, o posto rodoviário, a estação da guarda florestal e o ponto de instalação da nova antena.
Da figura, concluímos que cos(α) = 32/40 = 4/5. Usando, agora, a lei dos cossenos, obtemos $x^2 = x^2 + 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot x \cdot \cos(\alpha)$, de modo que 64x = 1600. Logo, x = 1600/64 = 25.



Resposta: A antena deve ser instalada no quilômetro 25 da estrada.

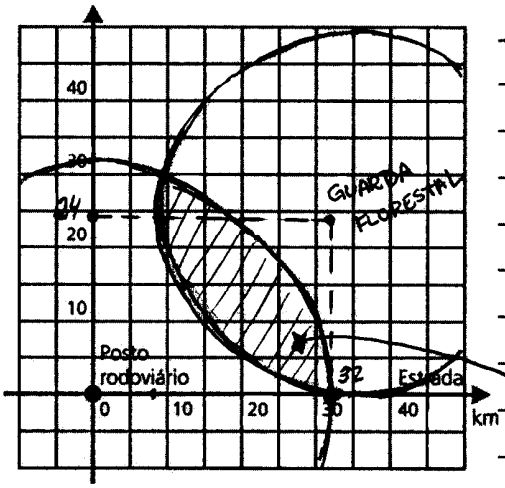
b''')
Considere o segmento OA que liga o posto rodoviário à estação da guarda florestal. Esse segmento pertence à reta y = (24/32)x = (3/4)x. O ponto médio do segmento OA é (16,12).
Queremos encontrar um ponto na forma (x,0) que pertença à reta que é perpendicular ao segmento AO e passa pelo ponto (16,12). Essa reta tem coeficiente angular –4/3 e é dada por (y – 12) = –(4/3)(x – 16). Assim, tomando y = 0, obtemos –12.3 = –4(x – 16). Logo, x = (4.16 + 12.3)/4 = 25.



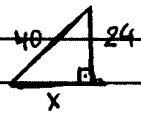
Resposta: A antena deve ser instalada no quilômetro 25 da estrada.

MATEMÁTICA

Exemplo Acima da Média



a)



$40^2 = x^2 + 24^2$

$x^2 = 1600 - 576$

$x^2 = 1024$

$x = 32$

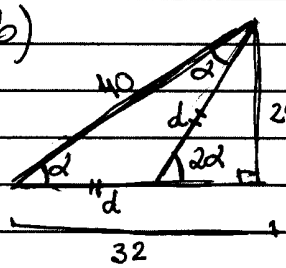
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

1ª antena) $(x-32)^2 + (y-24)^2 = 24^2$

2ª antena) $x^2 + y^2 = 32^2$

→ cobertura simultânea

b)



$\operatorname{sen}\alpha = \frac{24}{40}$

$\cos\alpha = \frac{32}{40}$

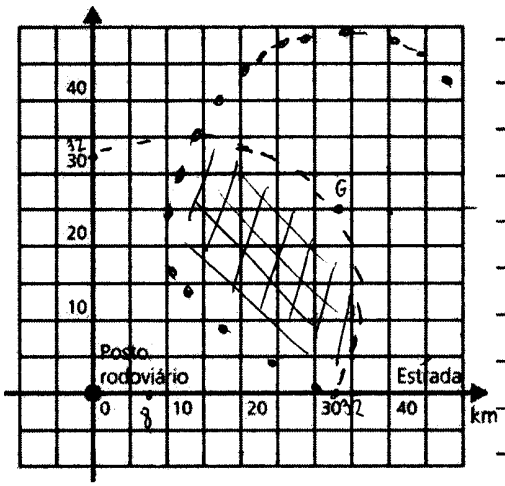
$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

$\frac{24}{d} = 2 \cdot \frac{24}{40} \cdot \frac{32}{40}$

$\frac{24}{d} = \frac{1536}{1600}$

$d = 25\,km$

Exemplo Abaixo da Média



a) $40^2 = 24^2 + x^2$

$x^2 = 1600 - 576$

$x^2 = 1024$

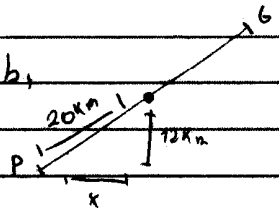
$x = 32$

---- posto

.... guarda

área coberta simultaneamente

b)



$400 = 144 + x^2$

$x^2 = 356$

$x = 24$

R: Km 24 da estrada

Comentários

Apesar de geometria analítica ser considerado um tópico difícil pelos alunos do ensino médio, o item **a** dessa questão é simples, pois requer apenas o esboço de dois círculos e a formulação de duas desigualdades. Já o item **b** exige o uso de conceitos matemáticos mais complexos. Ainda assim, como se vê acima, esse último item pode ser resolvido de várias formas diferentes, facultando-se ao candidato escolher o caminho que lhe parecer mais rápido.

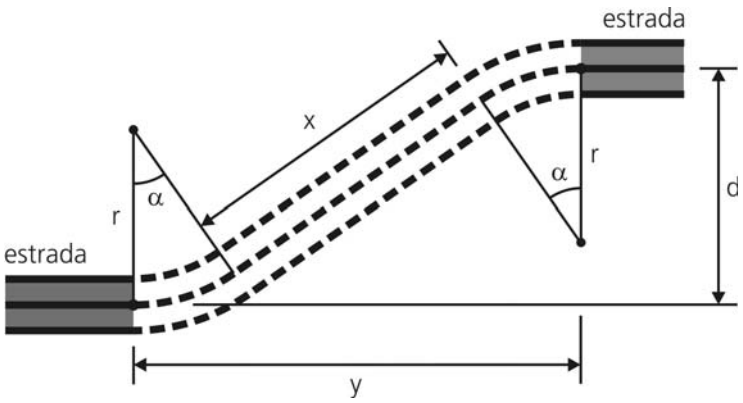
A maior dificuldade da questão está associada à compreensão do enunciado que, de fato, é longo. Assim, por exemplo, muitos candidatos imaginaram que, no item **b**, era preciso encontrar o ponto da estrada mais próximo do ponto médio do segmento OA e não o ponto equidistante dos dois postos. Dessa forma, tentaram resolver o item aplicando a semelhança de triângulos ou o teorema de Pitágoras, como no exemplo abaixo da média.

No item **a**, os erros se concentraram na troca da equação da circunferência pela fórmula da área do círculo, bem como no traçado incorreto das circunferências. Observando o exemplo abaixo da média, constatamos que o candidato determinou corretamente as coordenadas do posto da guarda florestal, mas não apresentou as desigualdades, além de ter feito um esboço errado do círculo de centro na origem, que não deveria ter pontos com abscissa ou ordenada maior que 32.

No exemplo acima da média, o candidato resolve o item **b** aplicando corretamente a fórmula do seno do arco duplo e a relação entre ângulo central e ângulo inscrito na circunferência. Já no item **a**, ele peca por fornecer duas equações em lugar de desigualdades.

Questão 23

Um engenheiro precisa interligar de forma suave dois trechos paralelos de uma estrada, como mostra a figura abaixo. Para conectar as faixas centrais da estrada, cujos eixos distam d metros um do outro, o engenheiro planeja usar um segmento de reta de comprimento x e dois arcos de circunferência de raio r e ângulo interno α.

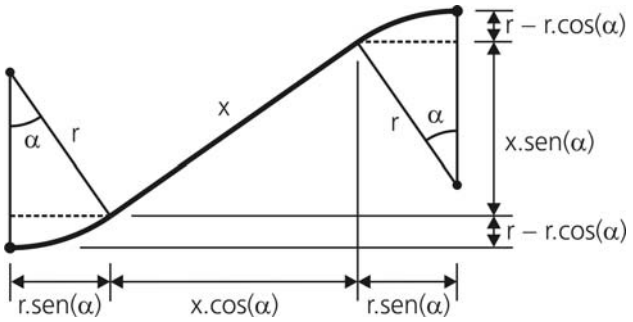


a) Se o engenheiro adotar $\alpha = 45°$, o segmento central medirá $x = d\sqrt{2} - 2r(\sqrt{2} - 1)$. Nesse caso, supondo que d = 72 m, e r = 36 m, determine a distância y entre as extremidades dos trechos a serem interligados.

b) Supondo, agora, que $\alpha = 60°$, r = 36 m e d = 90 m, determine o valor de x.

MATEMÁTICA

Resposta Esperada



a) **(2 pontos)**
O diagrama acima mostra que $y = 2r.\text{sen}(\alpha) + x.\cos(\alpha)$. Para $r = 36$, $d = 72$ e $\alpha = 45°$, temos $x = 72\sqrt{2} - 2.36(\sqrt{2} - 1) = 72$ m e $y = 2.36.\sqrt{2}/2 + 72\sqrt{2}/2 = 72\sqrt{2}$ m.

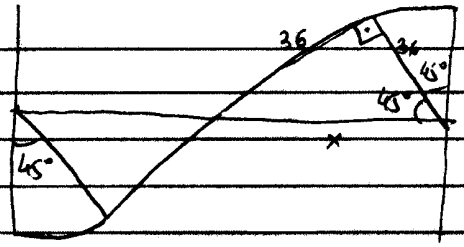
Resposta: $y = 72\sqrt{2}$ m.

b) **(2 pontos)**
A partir do diagrama acima, concluímos que $d = 2r - 2r.\cos(\alpha) + x.\text{sen}(\alpha)$. Supondo que $r = 36$, $d = 90$ e $\alpha = 60°$, temos $90 = 2.36 - 2.36.(1/2) + x.(\sqrt{3}/2)$, donde $x = (90 - 36).2/\sqrt{3} = 108/\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ m.

Resposta: $x = 36\sqrt{3}$ m.

Exemplo Acima da Média

a)

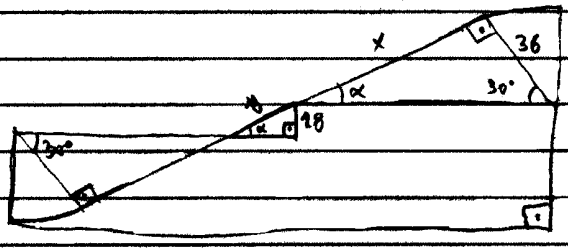


$\text{sen } 45 = \frac{36}{x}$ $x = 36\sqrt{2}$

$y = 36\sqrt{2}.2 \Rightarrow y = 72\sqrt{2}$

A distância y vale $72\sqrt{2}$ m.

b)



$\text{tg } 30 = \frac{x}{36} \Rightarrow x = 12\sqrt{3}$

$\text{sen } 60 = \frac{18}{y} \Rightarrow y = 12\sqrt{3}$

$\therefore x = 3.(12\sqrt{3})$

O valor de x é $36\sqrt{3}$ m

MATEMÁTICA

Exemplo Abaixo da Média

a) $x = 72\sqrt{2} - 2.36(\sqrt{2} - 1)$

$x = 72\ m$

$\boxed{y = 72\ m + 18\pi\ m}$

$(\cancel{y = 2.x +})$ $y = x + 2\left(\frac{\pi}{4}.36\right)$

$y = 72 + 18\pi$

b) $x = 90\sqrt{2} - 2.36(\sqrt{2} - 1)$

$x = 90\sqrt{2} - 72\sqrt{2} + 72$

$\boxed{x = 18\sqrt{2}\ m + 72\ m}$

Comentários

Essa questão é, certamente, a mais difícil da prova. Seu propósito é apresentar uma aplicação prática de trigonometria que seja acessível aos alunos do ensino médio. Problemas de concordância entre retas e arcos de circunferência são muito frequentes, não se limitando ao projeto de estradas.

O exemplo acima da média apresenta uma estratégia de resolução curiosa para os dois itens. No item **a**, o candidato constata que, quando $\alpha = 45°$, os centros das circunferências de raio r estão na mesma altura do desenho, de modo que y/2 (que, infelizmente, o aluno denomina x) é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem dois ângulos internos de 45°. No item **b**, adotando procedimento semelhante, ele observa que há uma diferença de 18 m entre as coordenadas verticais dos centros das circunferências e usa esse fato para determinar x. Apesar de usar a mesma letra para representar duas medidas diferentes, e de não explicar alguns passos, como a obtenção de x no item **a**, o candidato soube resolver a questão de forma eficiente e original.

No exemplo abaixo da média, o candidato parece não compreender o que y representa na figura, pois, no item **a**, calcula o comprimento do trecho de estrada a ser construído, em lugar da distância solicitada. No item **b**, o mesmo candidato usa a fórmula de x fornecida no item anterior, sem reparar que ela só é válida quando $\alpha = 45°$.

Questão 24

A caixa de um produto longa vida é produzida como mostra a sequência de figuras abaixo. A folha de papel da figura 1 é emendada na vertical, resultando no cilindro da figura 2. Em seguida, a caixa toma o formato desejado, e são feitas novas emendas, uma no topo e outra no fundo da caixa, como mostra a figura 3. Finalmente, as abas da caixa são dobradas, gerando o produto final, exibido na figura 4. Para simplificar, consideramos as emendas como linhas, ou seja, desprezamos a superposição do papel.

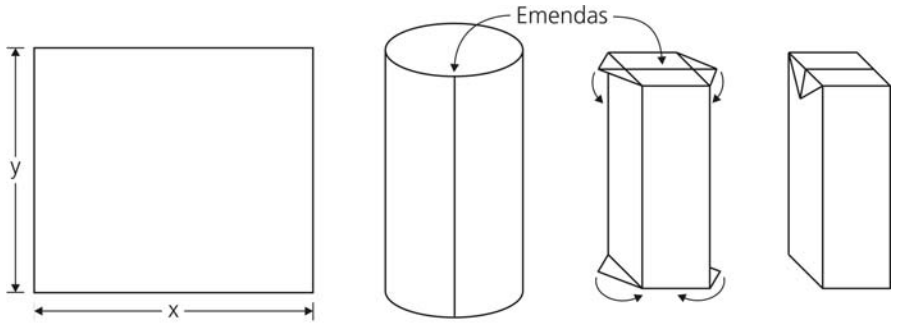


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

a) Se a caixa final tem 20 cm de altura, 7,2 cm de largura e 7 cm de profundidade, determine as dimensões x e y da menor folha que pode ser usada na sua produção.

b) Supondo, agora, que uma caixa tenha seção horizontal quadrada (ou seja, que sua profundidade seja igual a sua largura), escreva a fórmula do volume da caixa final em função das dimensões x e y da folha usada em sua produção.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Como desprezamos as emendas, o valor de x corresponde ao perímetro do retângulo da base da caixa. Assim, x = 2.7,2 + 2.7 = 28,4 cm.
Já o valor de y é dado pela soma da altura da caixa com o dobro da metade da menor dimensão de sua base, ou seja, y = 20 + 2·(7/2) = 27 cm.

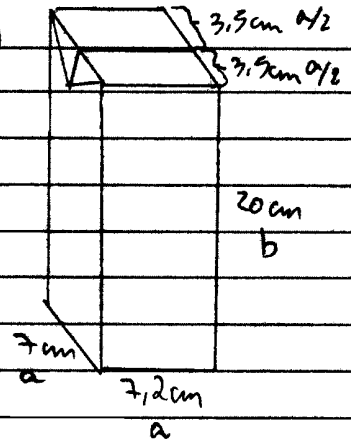
Resposta: A folha de papel deve ter dimensões x = 28,4 cm e y = 27 cm.

b) **(2 pontos)**
Como a caixa tem seção quadrada, o lado de sua base mede x/4.
Além disso, a altura da caixa mede y – 2· (x/4)/2 = y – x/4.
Logo, o volume da caixa é dado por $V = (x/4)^2(y - x/4)$, ou $V = (4x^2y - x^3)/64$.

Resposta: O volume da caixa é dado por $V = (4x^2y - x^3)/64$.

Exemplo Acima da Média

a)



Em y, temos que a dimensão deve ser:

$y = 20\,cm + 3{,}5\,cm$ (do topo) $+ 3{,}5\,cm$ (do fundo)

$y = 27\,cm$

Em x, temos que a dimensão deve ser:

$x = 7 + 7 + 7{,}2 + 7{,}2 = 28{,}4\,cm$

R: $x = 28{,}4\,cm$ e $y = 27\,cm$

b) O volume é dado por: $V = a^2 \cdot b$

Da figura e do item (a), temos que: $x = 4a \Rightarrow a = x/4$

e $y = b + \frac{a}{2} \cdot 2 = b + a = b + \frac{x}{4} \Rightarrow b = y - \frac{x}{4}$

Portanto: $V = \frac{x^2}{16}\left(y - \frac{x}{4}\right)$

R: $V = \frac{x^2}{16}\left(y - \frac{x}{4}\right)$

MATEMÁTICA

Exemplo Abaixo da Média

a) A medida x será dado por:
2. comprimento + 2. largura = 2.7 + 2. 7,2 = 14 + 14,4
x = 28,4 cm
A área total da caixa será:
2(7,2.7 + 7.20 + 7,2.20) = 2(234,4) = 468,8 cm²
como a área da folha será a mesma área da caixa e representada por x.y, tem-se que o valor de y será:
468,8 = 28,4.y
y = 16,5 cm
b) O volume será dado pela equação:
$V = \frac{1}{3} Ab.h$, como a secção é um quadrado, o lado me dirá x/4.
$V = \frac{1}{3} \frac{x^2}{16}.y$ $V = \frac{x^2.y}{48}$.

Comentários

Essa questão de geometria espacial envolve conceitos matemáticos simples, mas exige dos candidatos a visualização do processo de produção da caixa de um produto longa vida. Como essa visualização não é tarefa simples, muitos candidatos consideraram que y era igual à altura da caixa ou, como fez, no item **a**, o candidato do exemplo abaixo da média, igualaram a área da superfície da caixa à área da folha de papel, desconsiderando as pontas que são dobradas para baixo entre as figuras 3 e 4. Curiosamente, esse mesmo candidato usa y como altura da caixa no item b, além de empregar uma fórmula errada para o volume.
Seria bom se, ao fazer a prova, o candidato tivesse a oportunidade de pegar uma folha de papel para construir a caixa. Nesse caso, certamente, a maioria seria capaz de resolvê-la. O candidato do exemplo acima da média, entretanto, sem precisar recorrer a esse artifício, não só compreendeu perfeitamente como a caixa é montada, como apresentou uma resolução bastante clara, coroada por um ótimo desenho.