COMVEST
Comissão Permanente para os Vestibulares

2012
vestibular nacional
UNICAMP

2ª Fase

Matemática

MATEMÁTICA

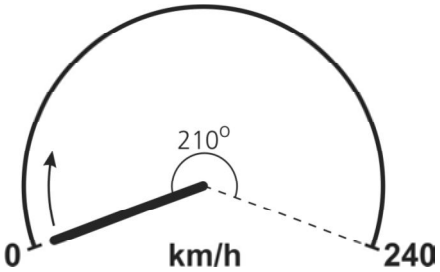
INTRODUÇÃO

A prova de matemática da segunda fase do vestibular da UNICAMP é elaborada de forma a identificar candidatos com boa capacidade de leitura de textos, tabelas e gráficos, bom raciocínio abstrato e domínio dos conteúdos matemáticos ministrados no ensino fundamental e no ensino médio. Não se deseja que o candidato decore centenas de fórmulas, mas que use seus conhecimentos e sua experiência para resolver questões que, frequentemente, abrangem mais de um tópico de matemática. Também se espera dos candidatos que resolvam questões relativas a assuntos de seu cotidiano, formulando modelos matemáticos que expressem corretamente os problemas apresentados.

Ao comentar a prova de matemática, tivemos a preocupação de apresentar estratégias alternativas de resolução das questões. Assim, sempre que um item vier acompanhado de um apóstrofo, como em **a'** ou **b'**, uma maneira diferente (e equivalente) de se obter a solução do problema é apresentada, com o intuito de enriquecer o aprendizado dos leitores. Outras formas de resolver os problemas aparecem nos exemplos acima da média reproduzidos neste caderno. Já os exemplos abaixo da média ilustram enganos comumente cometidos por estudantes do ensino médio. A esses exemplos, acrescentamos sugestões para que os candidatos evitem deslizes ao responder às questões.

Questão 13

O velocímetro é um instrumento que indica a velocidade de um veículo. A figura abaixo mostra o velocímetro de um carro que pode atingir 240 km/h. Observe que o ponteiro no centro do velocímetro gira no sentido horário à medida que a velocidade aumenta.



a) Suponha que o ângulo de giro do ponteiro seja diretamente proporcional à velocidade. Nesse caso, qual é o ângulo entre a posição atual do ponteiro (0 km/h) e sua posição quando o velocímetro marca 104 km/h?

b) Determinado velocímetro fornece corretamente a velocidade do veículo quando ele trafega a 20 km/h, mas indica que o veículo está a 70 km/h quando a velocidade real é de 65 km/h. Supondo que o erro de aferição do velocímetro varie linearmente com a velocidade por ele indicada, determine a função v(x) que representa a velocidade real do veículo quando o velocímetro marca uma velocidade de x km/h.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Como o ângulo de giro do ponteiro é diretamente proporcional à velocidade, podemos escrever

$$\frac{210°}{240\,\text{km}} = \frac{x}{104\,\text{km}}.$$

Desse modo, $x = 104 \cdot 210 / 240 = 91°$.

Resposta: O ângulo mede 91°.

b) **(2 pontos)**
A função pedida tem a forma v(x) = ax + b, em que a e b são constantes reais. Sabemos que o gráfico de uma função linear é uma reta cuja inclinação é **a** e cujo ponto de interseção com o eixo-y é (0, **b**). Assim, sabendo

que a reta passa pelos pontos (20, 20) e (70, 65), encontramos o coeficiente a escrevendo

$$a = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(65 - 20)}{(70 - 20)} = \frac{45}{50} = 0{,}9\,.$$

De posse de **a**, encontramos **b** usando um dos pontos dados. Tomando o ponto (20, 20), temos

$$\begin{aligned} v(20) &= a \cdot 20 + b \\ 20 &= 0{,}9 \cdot 20 + b \\ b &= 20 - 18 = 2\,. \end{aligned}$$

Resposta: A função é v(x) = 0,9x + 2.

b') A função pedida tem a forma v(x) = ax + b. Como a reta passa pelos pontos (20, 20) e (70, 65), temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 20a + b &= 20 \\ 70a + b &= 65. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira linha da segunda obtemos 50a = 45, donde a = 9/10. Substituindo, agora, o valor de a na primeira equação, obtemos 20.9/10 + b = 20. Desse modo, b = 20 – 18 = 2.

Resposta: A função é v(x) = 0,9x + 2.

Exemplo Acima da Média

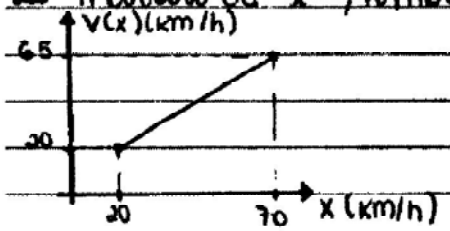
a) 240 km/h ——— 210°

104 km/h ——— x

$x = \frac{104 \cdot 210°}{240} = 91°$

O ângulo entre a posição 0km/h e sua posição quando o velocímetro marca 104 km/h é de 91°.

b) Esboçando o gráfico da velocidade real (V(x)) pela velocidade marcada x, temos:



$y - y_0 = m(x - x_0)$

$V(x) - 20 = \frac{45}{50}(x - 20)$

$V(x) = \frac{9x}{10} + 2 \Leftrightarrow \boxed{V(x) = 0{,}9x + 2}$

A função é $V(x) = 0{,}9x + 2$, com $0 \leq x \leq 240$ km/h

Exemplo Abaixo da Média

a) O ângulo entre a posição atual do ponteiro e a sua posição quando o velocímetro marca 104 Km é de 74°. Vendo na figura que estes são proporcionais e foi tirado 30 de 210 para 240, tirei 30 de 104 para chegar a resposta.

b) A função que representa a velocidade real do veículo quando o velocímetro marca uma velocidade de X quilômetros é:

$v(X) = x - 5$.

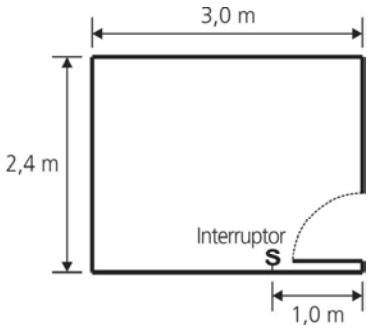
Comentários

O item **a** dessa questão exige apenas conhecimentos básicos sobre regra de três e a compreensão do funcionamento de um velocímetro de automóvel. Dada a facilidade do item, foi grande o número de candidatos que chegaram à resposta correta. Mesmo assim, erros nas contas de multiplicação e divisão foram comuns. Outro engano frequente é reproduzido no exemplo abaixo da média, no qual o candidato mistura unidades e escreve a equação 210° = 240 km/h – 30, chegando erroneamente à resposta 104 km/h – 30 = 74°. Observe que, nesse caso, não só há um erro de interpretação do problema, mas também uma grande mistura de unidades.

O item **b** da questão é um pouco mais difícil, pois envolve a definição de uma função afim. Desse modo, o desempenho médio dos candidatos foi bem inferior ao observado no item **a**. Os erros frequentes nesse item incluem a inversão do significado de x e v(x) (os candidatos acharam que x era a velocidade real e v(x) a velocidade indicada pelo velocímetro) e a definição de funções que não envolviam x (como em v(x) = 0,9a + 2). Também houve quem definisse v(x) por partes, apresentando uma expressão para $x < 20$ e outra para $x \geq 20$. No exemplo abaixo da média, o candidato subtrai 5 de x, supondo que o erro era constante, apesar de o enunciado indicar que ele variava linearmente com a velocidade. Já no exemplo acima da média, o candidato mostra o gráfico de v(x) para $20 \leq x \leq 70$ e, em seguida, encontra a equação da reta que passa pelos pontos (20, 20) e (70, 65).

Questão 14

A planta de um cômodo que tem 2,7 m de altura é mostrada ao lado.



a) Por norma, em cômodos residenciais com área superior a 6 m², deve-se instalar uma tomada para cada 5 m ou fração (de 5 m) de perímetro de parede, incluindo a largura da porta. Determine o número mínimo de tomadas do cômodo representado ao lado e o espaçamento entre as tomadas, supondo que elas serão distribuídas uniformemente pelo perímetro do cômodo.

b) Um eletricista deseja instalar um fio para conectar uma lâmpada, localizada no centro do teto do cômodo, ao interruptor, situado a 1,0 m do chão, e a 1,0 m do canto do cômodo, como está indicado na figura. Supondo que o fio subirá verticalmente pela parede, e desprezando a espessura da parede e do teto, determine o comprimento mínimo de fio necessário para conectar o interruptor à lâmpada.

MATEMÁTICA

Resposta Esperada

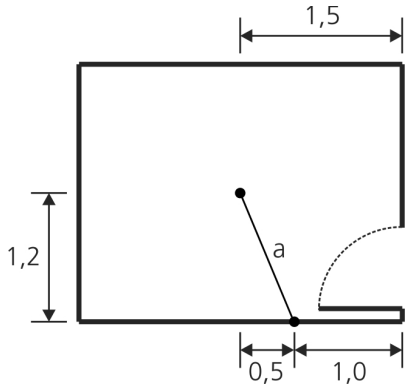
a) **(2 pontos)**

O cômodo, cuja área é superior a 6 m², tem perímetro igual a $2 \cdot 3{,}0 + 2 \cdot 2.4 = 10{,}8$ m. Desse modo, o número de tomadas é maior ou igual a 10,8/5 = 2,16. Logo, é preciso instalar ao menos 3 tomadas, espaçadas de 10,8/3 = 3,6 m.

Resposta: Devem ser instaladas ao menos 3 tomadas, com um espaçamento de 3,6 m entre elas.

b) **(2 pontos)**

O fio deverá subir 2,7 – 1,0 = 1,7 m verticalmente pela parede. Além disso, será preciso gastar **a** metros de fio para ligar o ponto do teto que está exatamente sobre o interruptor ao centro do cômodo, como mostra a figura ao lado.



Nesse caso,

$$a^2 = 0{,}5^2 + 1{,}2^2 = 0{,}25 + 1{,}44 = 1{,}69.$$

Logo, $a = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3$ m, e o fio deve medir 1,7 + 1,3 = 3,0 m.

Resposta: O fio deve medir 3 m.

Exemplo Acima da Média

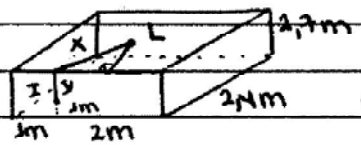
a) Perímetro = 3 + 3 + 2,4 + 2,4

P = 10,8 m | 5m 10,8 m | 3 tomadas

2,16 3,6 m

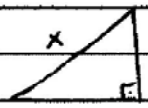
R: 3 tomadas. O espaço entre elas deve ser de 3,6 m.

b)



comprimento do fio = $l = y + x$

$y = 2{,}7 - 1 = 1{,}7$ m



$\frac{2{,}4}{2} = 1{,}2$

$1{,}5 - 1 = 0{,}5$

$x^2 = (1{,}2)^2 + (0{,}5)^2$

$x^2 = 1{,}44 + 0{,}25$

$x = \sqrt{1{,}69}$ $x = 1{,}3$ m

$l = 1{,}7 + 1{,}3 = 3$ m

R: O fio deve ter comprimento mínimo de 3m.

Exemplo Abaixo da Média

a) O número mínimo de tomadas é dois, com o espaçamento de 3,6 m, já que tem seu perímetro igual a 7,2 m.

b) Como a altura é 2,7 m ele precisa descer até 1,7 m e como está no centro, precisa chegar a parede 1,2 m, e ao cômodo mais 0,5 m; totalizando 3,4 m de fio.

Comentários

Essa é uma questão simples de geometria plana e espacial, que envolve a instalação de tomadas e fios em uma residência. O item **a** pede ao candidato que determine o número mínimo de tomadas em um cômodo, com base na norma que rege o assunto. Apesar de a resolução do item exigir apenas duas contas de divisão, como mostra o exemplo acima da média, o percentual dos candidatos que alcançaram dois ou mais pontos na questão não chegou a 50%. Muitos cometeram erros graves na divisão, enquanto outros confundiram perímetro com área, como fez o candidato do exemplo abaixo da média. Também houve quem interpretasse incorretamente a expressão "ou fração", muito usada em textos técnicos.
No item **b**, era preciso usar o teorema de Pitágoras para determinar o comprimento da parte do fio que cruza o teto do cômodo. No exemplo acima da média, o candidato fez dois desenhos que ilustram o caminho do fio, facilitando a resolução do problema. No exemplo abaixo da média, o candidato supôs que o fio atravessaria o teto seguindo uma direção perpendicular à parede, o que não fornece o comprimento mínimo.

Questão 15

O número áureo é uma constante real irracional, definida como a raiz positiva da equação quadrática obtida a partir de

$$\frac{x+1}{x} = x.$$

a) Reescreva a equação acima como uma equação quadrática e determine o número áureo.

b) A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... é conhecida como sequência de Fibonacci, cujo n-ésimo termo é definido recursivamente pela fórmula

$$F(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \text{ ou } 2; \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Podemos aproximar o número áureo, dividindo um termo da sequência de Fibonacci pelo termo anterior. Calcule o 10º e o 11º termos dessa sequência e use-os para obter uma aproximação com uma casa decimal para o número áureo.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Reescrevendo a equação, obtemos

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Podemos resolver essa equação usando a fórmula de Báskara:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, a raiz positiva da equação é $x = (1+\sqrt{5})/2$.

Resposta: O número áureo é $(1+\sqrt{5})/2$.

b) **(2 pontos)**
Aplicando a fórmula recursiva de F(n), obtemos F(9) = 21 + 13 = 34, F(10) = 34 + 21 = 55 e F(11) = 55 + 34 = 89. Assim, a aproximação desejada para o número áureo é $89/55 \approx 1{,}6$.

Resposta: O 10º termo da sequência é 55 e o 11º termo é 89. O valor aproximado do número áureo é 1,6.

Exemplo Acima da Média

a) $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

↳ não convém

A equação quadrática é $x^2 - x - 1 = 0$ e o número áureo é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) $F(10) = F(9) + F(8) = 34 + 21 = 55$

$F(9) = F(8) + F(7) = 21 + 13 = 34$

$F(11) = F(10) + F(9) = 55 + 34 = 89$

$\frac{F(11)}{F(10)} = \frac{89}{55} \cong 1{,}6$

89 | 55
340 1,6
10

O número áureo, com aproximação com uma casa decimal é 1,6.

Exemplo Abaixo da Média

a) $x^2 = x + 1$

$\boxed{x^2 - x - 1 = 0}$ R: número áureo.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1 - 4.(+1).(-1)$

$\Delta = 1 + 4$

$\Delta = 5$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \boxed{x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$

b) número áureo = 13 ÷ 8 = 1,625

$F(10) = F(10-1) + F(10-2)$

$F(10) = F(9) + F(8)$

$F(10) = 32 + 21$

$F(10) = 53$

$F(11) = F(11-1) + F(11-2)$

$F(11) = F(10) + F(9)$

$F(11) = 53 + 32$

$F(11) = 85$

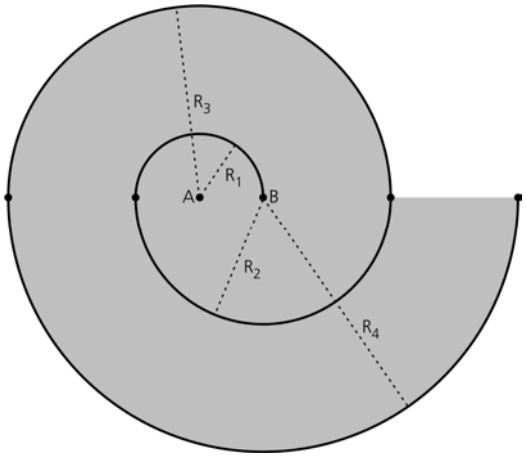
Comentários

Essa questão exige a resolução de uma equação quadrática e a manipulação de uma função definida recursivamente. Os dois itens foram considerados fáceis pelos candidatos, o que fez da questão aquela com o maior percentual de respostas com nota 4. O exemplo acima da média mostra uma resolução clara e direta. Já o exemplo abaixo da média ilustra alguns erros frequentes, como a inclusão da raiz negativa na resposta do item **a**, e o cálculo incorreto de um termo da sequência, no item **b**. O candidato também contraria o enunciado ao determinar o número áureo a partir de F(6) e F(7).

Curiosamente, muitos candidatos perderam pontos por terem indicado apenas $x^2 - x + 1$ como a "equação quadrática" pedida no item **a**, em lugar de escrever $x^2 - x + 1 = 0$.

Questão 16

Uma curva em formato espiral, composta por arcos de circunferência, pode ser construída a partir de dois pontos A e B, que se alternam como centros dos arcos. Esses arcos, por sua vez, são semicircunferências que concordam sequencialmente nos pontos de transição, como ilustra a figura ao lado, na qual supomos que a distância entre A e B mede 1 cm.



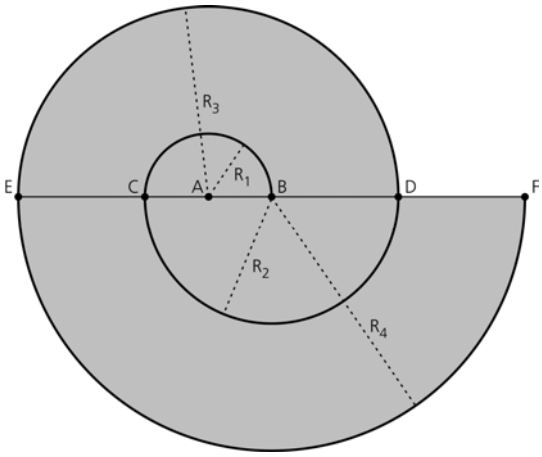
a) Determine a área da região destacada na figura.

b) Determine o comprimento da curva composta pelos primeiros 20 arcos de circunferência.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Observamos, na figura ao lado, que



$$R_1 = \overline{AB} = 1\,\text{cm}.$$
$$R_2 = \overline{CB} = 2R_1 = 2\,\text{cm}.$$
$$R_3 = \overline{AD} = R_1 + R_2 = 3\,\text{cm}.$$
$$R_4 = \overline{EB} = 2R_2 = 4\,\text{cm}.$$

A área da região destacada é a soma das áreas de dois semicírculos, um com raio R_3 e outro com raio R_4. Logo,

$$A = \frac{\pi R_3^2}{2} + \frac{\pi R_4^2}{2} = \frac{\pi}{2}(3^2 + 4^2) = \frac{25\pi}{2}\,\text{cm}^2.$$

Resposta: A área da região destacada é igual a $25\pi/2$ cm^2.

b) **(2 pontos)**

O i-ésimo arco de circunferência mede metade do comprimento da circunferência de raio R_i, ou seja, $c_i = \pi R_i = \pi i$. O comprimento da curva formada pelos primeiros n arcos é a soma dos termos de uma progressão aritmética de termo geral c_i. Logo,

$$c = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} \pi i = \pi \sum_{i=1}^{n} i = \frac{\pi n(n+1)}{2}.$$

Supondo que n = 20, temos $c = \pi \cdot 20 \cdot 21/2 = 210\pi$ cm.

Resposta: A curva tem 210π cm de comprimento.

Exemplo Acima da Média

a) Arco 1 = $r = 1cm$

~~Arco 2~~ $A = \pi r^2/2 = \pi/2$

Arco 2 = $r = 2cm$

$A = \pi r^2/2 = 4\pi/2 = 2\pi$

Arco 3 = $r = 3cm$

$A = \pi r^2/2 = 9\pi/2$

Arco 4 = $r = 4cm$

$A = \pi r^2/2 = 16\pi/2 = 8\pi$

$A_{total} = \frac{\pi}{2} + 2\pi + \frac{9\pi}{2} + 8\pi = \frac{10\pi}{2} + 10\pi = 15\pi$

~~A total = cm~~

$\boxed{A_{total} = 16\pi \ cm^2}$

b) Os raios dos arcos estão em PA de razão 1, portanto, o comprimento de suas curvas encontram-se em uma PA de razão π. Logo, a soma de todos os arcos é igual a:

$a_1 = \pi$

$r = \pi$

$a_{20} = \pi + 19\pi$

$a_{20} = 20\pi$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$

$S_{20} = (\pi + 20\pi).10$

$S_{20} = 210\pi$

$\boxed{S_{20} = 210\pi \ cm}$

Exemplo Abaixo da Média

a) $R_1 = 1cm$

$A = \pi R^2$

$A_1 = \pi/2$ (metade da circunferência) cm^2

$R_2 = 2R_1 = 2cm$

$A_2 = 4\pi/2 = 2\pi \ cm^2$

$R_3 = 2R_2 = 4cm$

$A_3 = 16\pi/2 = 8 \ cm^2$

$R_4 = 2R_3 = 8cm$

$A_4 = 64\pi/2 = 32\pi \ cm^2$

~~$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$~~

$A_T = A_4 + A_3$

$A_T = 40\pi \ cm^2$

b) ~~As áreas formam uma PG de~~

~~$q = 4$~~

Os raios formam uma PG de

$q = 2$

logo;

$S_m = \cancel{a_1 + a_m n}/2$

$S_m = a_1(q^n - 1)/q - 1$

$S_m = 2^{19}$

$a_1 = 1$

$q = 2$

$n = 20$

logo o comprimento é $2^{19}\pi \ cm$

~~$a_1 = \pi/2$~~

~~$a_n = a_1 + (n-1)R$~~

~~$a_{20} = \pi/2 + (19).2\pi$~~

~~$a_{20} = 1 + 38$~~

~~$a_{20} =$~~

Comentários

Apesar de envolver apenas conceitos básicos de progressão aritmética e geometria plana, essa questão se mostrou desafiadora por exigir que os candidatos combinassem esses tópicos para gerar uma curva em formato espiral.

No exemplo acima da média, o candidato apresenta uma resolução limpa, mas erra no item **a**, ao somar as áreas de quatro semicírculos, em lugar de apenas dois. O exemplo abaixo da média mostra outro engano comum: a suposição de que os raios estão em progressão geométrica, em lugar de aritmética. Um erro como esse poderia ter sido evitado se o aluno tivesse feito uma inspeção cuidadosa da figura.

Muitos candidatos também somaram as áreas de círculos completos, o que indica que se distraíram ao resolver a questão, ou que preferiram usar fórmulas decoradas, em lugar de investigar as particularidades do problema.

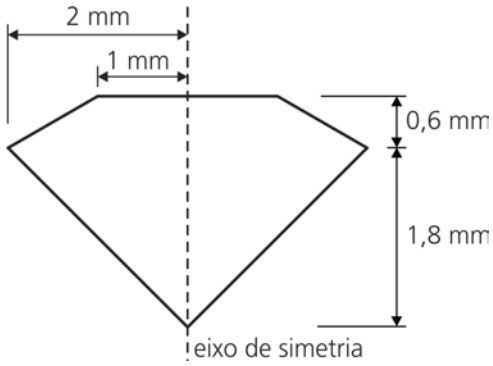
Finalmente, cabe mencionar o uso excessivo da aproximação $\pi \approx 3$ pelos vestibulandos. Essa aproximação, além de desnecessária, não é adequada, já que π não é um número inteiro. Salvo quando houver alguma disposição em contrário, não é boa prática fazer aproximações ao fornecer respostas que envolvem números irracionais.

Questão 17

Um brilhante é um diamante com uma lapidação particular, que torna essa gema a mais apreciada dentre todas as pedras preciosas.

a) Em gemologia, um quilate é uma medida de massa, que corresponde a 200 mg. Considerando que a massa específica do diamante é de aproximadamente 3,5 g/c^3, determine o volume de um brilhante com 0,7 quilate.

b) A figura ao lado apresenta a seção transversal de um brilhante. Como é muito difícil calcular o volume exato da pedra lapidada, podemos aproximá-lo pela soma do volume de um tronco de cone (parte superior) com o de um cone (parte inferior). Determine, nesse caso, o volume aproximado do brilhante.



Dica: o volume de um tronco de cone pode ser obtido empregando-se a fórmula

$$V = \frac{\pi}{3} h (R^2 + Rr + r^2),$$

em que R e r são os raios das bases e h é a altura do tronco.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Se 1 quilate corresponde a 200 mg, então 0,7 quilate corresponde a 0,7·200 = 140 mg = 0,14 g.

Como cada cm^3 de diamante tem 3,5 g, podemos escrever

$$\frac{3{,}5\,g}{1\,cm^3} = \frac{0{,}14\,g}{x},$$

donde 3,5x = 0,14, ou x = 0,14/3,5 = 0,04 cm^3.

Resposta: Um brilhante de 0,7 quilate tem 0,04 cm^3, ou 40 mm^3.

b) **(2 pontos)**

A parte superior do brilhante é um tronco de cone com R = 2 mm, r = 1 mm e h = 0,6 mm. Logo, seu volume é

$$V_T == \frac{\pi}{3} h (R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi}{3} 0{,}6 (2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2) = 1{,}4\pi\, mm^3.$$

Por sua vez, a parte inferior do brilhante é um cone com 1,8 mm de altura e raio da base igual a 2 mm. Assim, o volume da parte inferior é dado por

$$V_C = \frac{\pi}{3} h R^2 = \frac{\pi}{3} 1{,}8 \cdot 2^2 = 2{,}4\pi \, mm^3.$$

Logo, o volume total é igual a $V_T + V_C = 1{,}4\pi + 2{,}4\pi = 3{,}8\pi$ mm³.

Resposta: O brilhante tem volume aproximado de 3,8π mm³.

Exemplo Acima da Média

a) 1 quilate = 200 mg (massa) = 0,2 g $\xrightarrow{1000}$ g → mg

μdiam = 3,5 g/cm³

0,2 g – 1 quilate
m – 0,7 quilate

$m = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-2}}{1}$ ∴ m = 0,14 g = 140 mg

3,5 g – 1 cm³
0,14 g – V

$V = \frac{14 \cdot 10^{-2}}{35 \cdot 10^{-1}} = 0{,}4 \cdot 10^{-1}$ ∴ V = 0,04 cm³.

b) Soma = $V_{Tronco} + V_{cone}$

$V_{Tronco} = \frac{\pi}{3} \cdot 0{,}6(4 + 2 \cdot 1 + 1) = \frac{\pi}{3} \cdot 0{,}6 \cdot 7 \Rightarrow V_{Tronco} = 1{,}4\pi \, mm^3$

$V_{cone} = \frac{\pi R^2 \cdot H}{3} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 1{,}8}{3} \Rightarrow V_{cone} = 2{,}4\pi \, mm^3.$

$V_{brilhante} \cong 1{,}4\pi + 2{,}4\pi$ ∴ $V_{brilhante} = 3{,}8\pi \, mm^3$

Exemplo Abaixo da Média

A) (massa específica) $\mu = \frac{m}{V}$ (massa) (volume) $\Rightarrow V = \frac{m}{\mu}$ (I)

1 Quilate = 200 mg $\Rightarrow$ por regra de três temos $x = 0{,}7 \cdot 200 = 140$ mg (II)
0,7 Quilate - x mg

I) $V = \frac{m}{\mu} = \frac{140}{3{,}2} = 40\ cm^3$

B) $V = \frac{\pi}{3} \cdot h\ (R^2 + R.r + r^2) \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} \cdot 2{,}4 \cdot (4 + 2 + 1) \Rightarrow V = 5{,}6\pi\ mm^3$

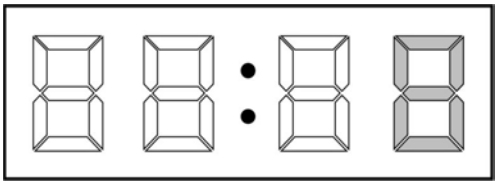
Comentários

O item **a** dessa questão requeria o uso de uma regra de três para a determinação do volume do diamante. Além disso, o candidato precisava fazer uma conversão de unidades para chegar à resposta correta. Essa conversão foi a maior fonte de erro no item, como ilustra o exemplo abaixo da média, no qual o candidato cometeu outro engano ao copiar a massa específica do diamante.

No item **b**, o cálculo do volume do brilhante deveria ser feito com a ajuda da fórmula do volume do tronco de cone, fornecida no enunciado. Ao resolver esse item, alguns candidatos (como o do exemplo abaixo da média) deixaram de dividir a gema em duas partes, aplicando a fórmula do volume uma única vez e usando h = 2,4 mm. Outros omitiram π na resposta, ou aproximaram π por 3, como ocorreu na questão 16. Ainda assim, a questão foi a que teve a maior nota média de toda a prova, com um baixo índice de candidatos com nota 0.

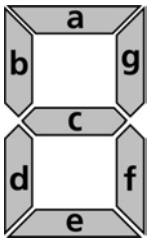
Questão 18

O mostrador de determinado relógio digital indica horas e minutos, como ilustra a figura ao lado, na qual o dígito da unidade dos minutos está destacado.

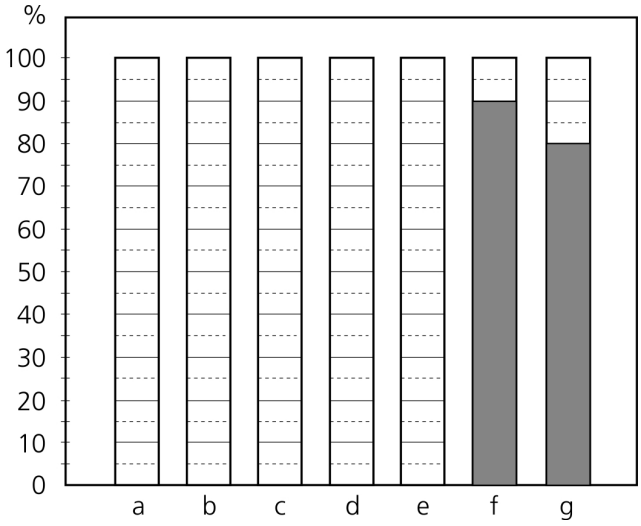


O dígito em destaque pode representar qualquer um dos dez algarismos, bastando para isso que se ative ou desative as sete partes que o compõem, como se mostra abaixo.

a) Atribuindo as letras a, b, c, d, e, f, g aos trechos do dígito destacado do relógio, como se indica ao lado, pinte no gráfico de barras abaixo a porcentagem de tempo em que cada um dos trechos fica aceso. Observe que as porcentagens referentes aos trechos f e g já estão pintadas.



b) Supondo, agora, que o dígito em destaque possua dois trechos defeituosos, que não acendem, calcule a probabilidade do algarismo 3 ser representado corretamente.

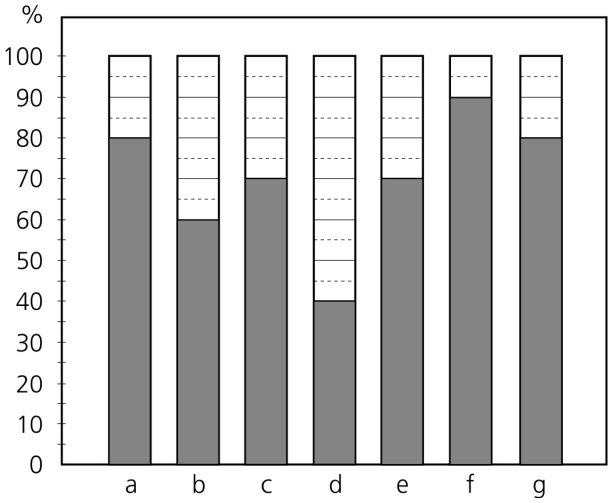


Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Como o tempo de exposição é o mesmo para todos os algarismos e o trecho **a** aparece em 8 dos 10 algarismos, concluímos que ele fica aceso em 8/10 = 80% do tempo. Repetindo esse raciocínio para os demais trechos, obtemos o gráfico de barras ao lado.

Resposta: O gráfico ao lado mostra a porcentagem de tempo em que cada trecho fica aceso.



b) **(2 pontos)**

A probabilidade de apresentar defeito é a mesma para todos os trechos. Supondo que a ocorrência de defeito em um trecho seja independente da existência de outro trecho defeituoso, o número de maneiras diferentes de distribuir dois trechos defeituosos pelos sete trechos de um dígito é dado por

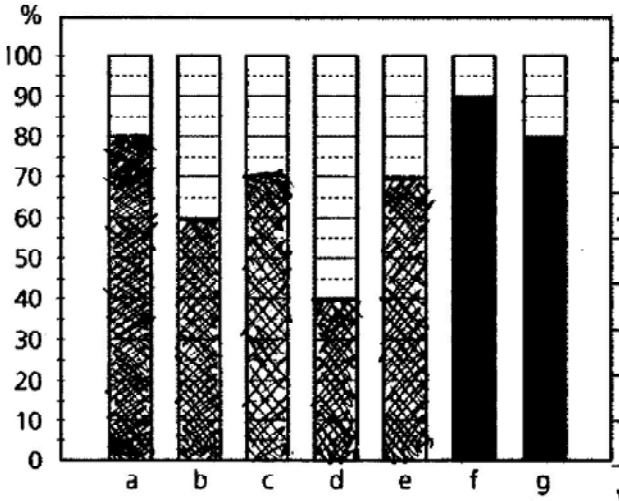
$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21.$$

Para que o algarismo 3 seja representado corretamente, é preciso que os trechos defeituosos sejam aqueles indicados pelas letras b e d. Assim, em apenas uma das 21 combinações, o algarismo 3 será mostrado corretamente. Logo, a probabilidade é igual a 1/21.

Resposta: A probabilidade de que o algarismo 3 seja representado corretamente é igual a 1/21.

MATEMÁTICA

Exemplo Acima da Média



b) existem 7 trechos que podem estar com defeito. Dentr esses, apenas dois estão com defeito. Para que o número 3 seja representado corretamente, os trechos com defeito devem ser o "b" e o "d".

Assim, temos:

a [b] c [d] e f g

$7 \times 6 = 42$ opções.

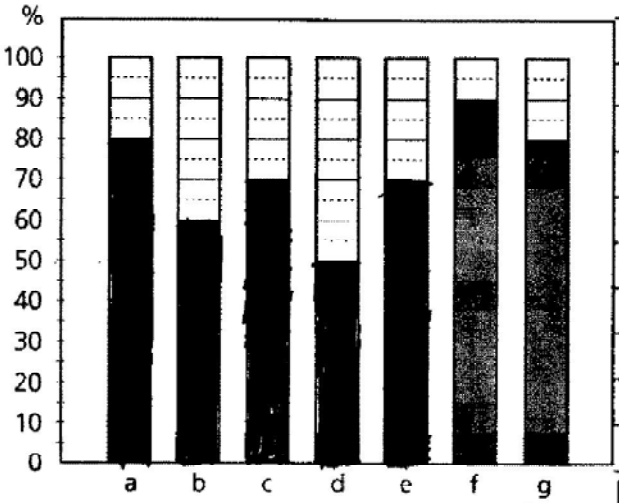
Mas como escolher "b" & "d" é a mesma coisa de escolher "d" & "b", temos: $42/2 = 21$ possibilidades.

Logo:

$P = \frac{1}{21}$

Resposta = a probabilidade é igual a $\frac{1}{21}$

Exemplo Abaixo da Média



b) O algarismo 3 só é representado se os trechos defeituosos são os trechos "b" e "d".

A probabilidade desses trechos não acenderem é de $\frac{2}{7}$, logo a probabilidade do algarismo 3 ser representado corretamente é de

$\boxed{\frac{2}{7}}$

$P = \frac{2}{7}$

Comentários

O primeiro item da questão era simples, exigindo apenas a manipulação de um gráfico de barras e o cálculo de algumas porcentagens. Desse modo, a maioria dos candidatos chegou à resposta correta.

O item **b** foi respondido por poucos vestibulandos, o que evidencia as deficiências de formação em combinatória e probabilidade apresentadas pela maioria dos concluintes do ensino médio. O exemplo abaixo da média mostra uma interpretação simplista, e equivocada, da probabilidade de o número 3 ser representado corretamente. O candidato do exemplo acima da média, por sua vez, chegou à combinação dos trechos defeituosos usando a fórmula do arranjo e eliminando, em seguida, os casos duplicados.

Questão 19

Um supermercado vende dois tipos de cebola, conforme se descreve na tabela abaixo.

Tipo de cebola	Peso unitário aproximado (g)	Raio médio (cm)
Pequena	25	2
Grande	200	4

a) Uma consumidora selecionou cebolas pequenas e grandes, somando 40 unidades, que pesaram 1700 g. Formule um sistema linear que permita encontrar a quantidade de cebolas de cada tipo escolhidas pela consumidora e resolva-o para determinar esses valores.

b) Geralmente, as cebolas são consumidas sem casca. Determine a área de casca correspondente a 600 g de cebolas pequenas, supondo que elas sejam esféricas. Sabendo que 600 g de cebolas grandes possuem 192π cm^2 de área de casca, indique que tipo de cebola fornece o menor desperdício com cascas.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

O sistema linear deve ter duas equações, uma associada ao número e a outra ao peso das cebolas selecionadas pela consumidora. Assim, temos

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \\ 25x + 200y &= 1700. \end{aligned}$$

Isolando x na primeira equação, obtemos x = 40 – y. Substituindo esse valor na segunda equação, concluímos que 25(40 – y) + 200y = 1700, ou 175y = 700, ou ainda y = 700/175 = 4. Logo, x = 40 – y = 36.

Resposta: Resolvendo o sistema acima, concluímos que a consumidora selecionou 36 cebolas pequenas e 4 cebolas grandes.

b) **(2 pontos)**

A casca de uma cebola pequena tem área igual a $4\pi r^2 = 4\pi 2^2 = 16\pi\,cm^2$. Como 600 g de cebolas pequenas correspondem a 600/25 = 24 cebolas, a área total de casca equivale a $24 \cdot 16\pi = 384\pi\,cm^2$.

Como a área de casca de 600 g de cebolas grandes é igual a $192\pi\,cm^2$, as cebolas grandes fornecem o menor desperdício com cascas.

Resposta: O desperdício com cascas é menor para as cebolas grandes.

MATEMÁTICA

Exemplo Acima da Média

a) Chamando o número de cebolas pequenas de "p" e o número de cebolas grandes de "g", temos o sistema:

$$\begin{cases} p + g = 40 \\ 25p + 200g = 1700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 40 - g & \text{(I)} \\ 25p + 200g = 1700 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$25(40-g) + 200g = 1700 \Leftrightarrow 175g = 700 \Leftrightarrow g = 4$

Então, $p = 40 - 4 = 36$.

Assim, são 4 cebolas grandes e 36 cebolas pequenas.

b) 600g de cebolas pequenas correspondem a:

$\frac{600g}{25g} = 24$ cebolas pequenas.

Como a área da superfície de uma esfera é dada por: $A = 4\pi R^2$, temos que a área da casca de ~~600~~ 600g de cebolas pequenas será $A_c = 24 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 384\pi \text{ cm}^2$.

Como $384\pi > 192\pi$, a cebola pequena tem maior desperdício com cascas.

Resposta: A área de casca de 600g de cebolas pequenas é $384\pi \text{ cm}^2$ e a cebola do tipo grande fornece o menor desperdício com cascas.

Exemplo Abaixo da Média

a) $25P + 200G = 1700$ ⇝ peso em gramas

$2P + 4G = 40$ ⇝ raio em cm

b) $600g - 192\pi \text{ cm}^2$

$25g - 1$ $\quad x = 25$ cebolas pequenas

$600 - x$

$200g - 1$ $\quad x = 3$ cebolas grandes

$600 - x$

$\Rightarrow 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 2^2 \Rightarrow 8\pi \Rightarrow 8\pi \cdot 25 \Rightarrow 200\pi \text{ cm}^2$

A cebola grande fornece menor desperdício de casca.

Comentários

O item **a** dessa questão envolvia a formulação e a resolução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas. Infelizmente, uma grande parcela dos candidatos não conseguiu sequer formular o sistema, como

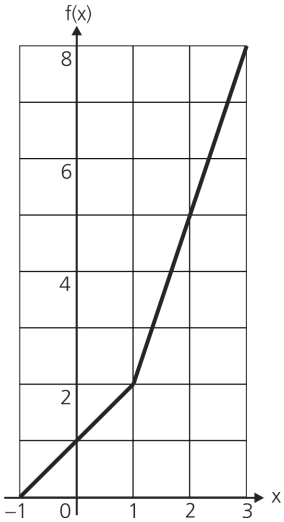
mostra o exemplo abaixo da média, no qual o raio das cebolas foi usado na equação relacionada ao número de cebolas. Esse exemplo também ilustra a dificuldade que muitos têm em resolver um sistema simples, mesmo depois de formulá-lo.
Os erros mais frequentes no item **b** incluíram a manipulação incorreta de frações, o uso de uma fórmula incorreta para a área da superfície da esfera e a interpretação errada do resultado, o que fez com que muitos candidatos afirmassem que as cebolas pequenas forneciam o menor desperdício.

Questão 20

Considere a função f(x) = 2x + |x + p|, definida para x real.

a) A figura ao lado mostra o gráfico de f(x) para um valor específico de p. Determine esse valor.

b) Supondo, agora, que p = –3, determine os valores de x que satisfazem a equação f(x) = 12.



Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + p, & \text{se } x \geq -p \\ x - p, & \text{se } x < -p \end{cases}$$

Logo, para x = 1, temos 3.1 + p = 1 – p, de modo que 2p = –2, ou p = –1.

Resposta: p = –1.

a') Para x = 1, devemos ter $f(x) = 2 \cdot 1 + |1 + p| = 2$. Assim, $|1 + p| = 0$, de modo que p = –1.

Resposta: p = –1.

b) **(2 pontos)**

Se x < 3, a equação $2x + |x - 3| = 12$ é equivalente a 2x – x + 3 = 12, cuja solução é x = 9. Entretanto, como supomos que x < 3, descartamos essa solução.

Se $x \geq 3$, a equação $2x + |x - 3| = 12$ é equivalente a 2x + x – 3 = 12, donde 3x = 15, ou x = 5.

Resposta: x = 5.

MATEMÁTICA

Exemplo Acima da Média

a) * $f(x) = 2x + |x+p|$

• Para $(0,1)$:

$1 = 2.0 + |0+p|$

$|p| = 1 \Rightarrow p = +1$ ou $p = -1$

• Para $(2,5)$:

$5 = 2.2 + |2+p|$

$|2+p| = 1 \Rightarrow 2+p = 1 \Rightarrow p = -1$

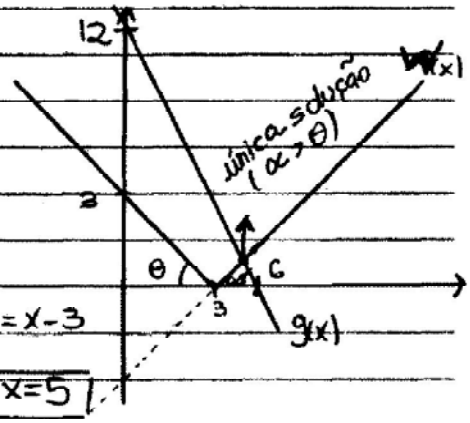
$\hookrightarrow -2-p = 1 \Rightarrow p = -3$

$\boxed{\text{Solução: } p = -1}$

b) * Para $p = -3 \Rightarrow f(x) = 2x + |x-3|$

$12 = 2x + |x-3|$

$\underbrace{|x-3|}_{W(x)} = \underbrace{12-2x}_{g(x)}$



* Considere o gráfico ao lado, em que representamos as duas funções

* No gráfico, temos que $f(x) = 12$ ocorre para $W(x) = x-3$

$x - 3 = 12 - 2x$

$3x = 15 \Rightarrow x = 5$ RESPOSTA: $\boxed{f(x) = 12 \Leftrightarrow x = 5}$

Exemplo Abaixo da Média

a) De acordo com o gráfico, quando $x = 0$, $y = 1$. Logo, substituindo na fórmula: $1 = 0 + |0+p| \rightarrow 1 = |p|$, portanto $p = \pm 1$.

R: Valor de $p = 1$ ou -1

b) $12 = 2x + |x-3|$

$12 - 2x = x - 3$ ou $12 - 2x = -x + 3$

$15 = 3x$ $\qquad 9 = x$

$x = 5$ ← ou

R.: Valores de $x = 5$ ou 9.

Comentários

A maioria dos alunos do ensino médio sente dificuldade em trabalhar com funções modulares. Assim, o desempenho médio nessa questão não foi muito alto.
Para resolver o item **a**, a maioria dos candidatos seguiu a linha apresentada na resolução **a'** acima. Entretanto, boa parte tentou encontrar o valor de p partindo de um ponto diferente de (1, 2). Nesse caso, o uso de um único ponto levava à conclusão errônea de que p podia ser 1 ou –1, como ocorre no exemplo abaixo da média. Para chegar à resposta correta usando a estratégia **a'**, era necessário o emprego de um segundo ponto, como fez o candidato do exemplo acima da média.
O erro cometido pelo candidato do exemplo abaixo da média ao tentar resolver o item **b** também foi frequente. Sem se dar conta de que a equação $2x - x + 3 = 12$ só era válida para $x < 3$, ele não descartou a solução $x = 9$, obtendo dois valores para x. Já o exemplo acima da média mostra uma resolução engenhosa desse item. Baseando-se nos gráficos de $|x - 3|$ e de $12 - 2x$, o candidato precisou resolver apenas uma equação para chegar à resposta correta.

Questão 21

Uma bateria perde permanentemente sua capacidade ao longo dos anos. Essa perda varia de acordo com a temperatura de operação e armazenamento da bateria. A função que fornece o percentual de perda anual de capacidade de uma bateria, de acordo com a temperatura de armazenamento, T (em °C), tem a forma

$$P(T) = a \cdot 10^{bt},$$

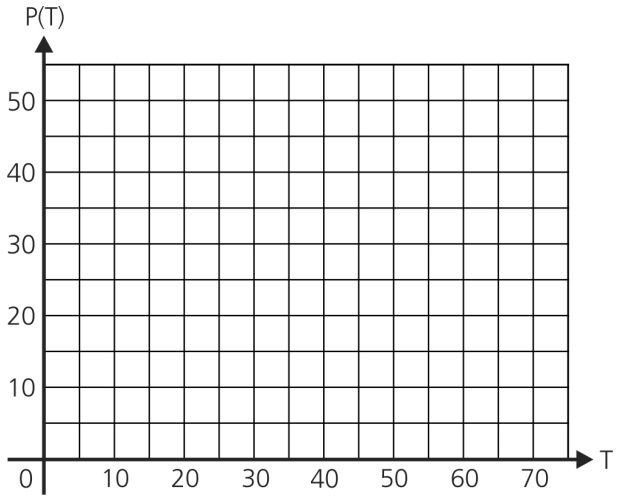
em que a e b são constantes reais positivas. A tabela abaixo fornece, para duas temperaturas específicas, o percentual de perda de uma determinada bateria de íons de Lítio.

Temperatura (°C)	Perda anual de capacidade (%)
0	1,6
55	20,0

Com base na expressão de P(T) e nos dados da tabela,

a) esboce, abaixo, a curva que representa a função P(T), exibindo o percentual exato para T = 0 e T = 55;

b) determine as constantes a e b para a bateria em questão. Se necessário, use $\log_{10}(2) \approx 0{,}30$, $\log_{10}(3) \approx 0{,}48$ e $\log_{10}(5) \approx 0{,}70$.

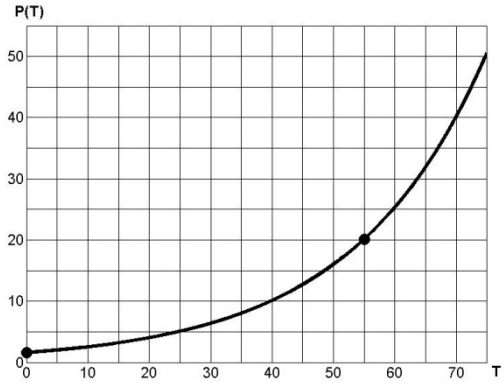


MATEMÁTICA

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

A função P(T) é exponencial e tem coeficientes **a** e **b** positivos. A curva desejada passa pelos pontos (0; 1,6) e (55, 20), como mostra o gráfico ao lado.



Resposta: Um esboço da curva é apresentado no gráfico ao lado.

b) **(2 pontos)**

Sabemos que P(0) = 1,6. Assim, $a \cdot 10^{b0} = 1{,}6$, de modo que a = 1,6.

Da mesma forma, $P(55) = 1{,}6 \cdot 10^{b55}$, donde

$$1{,}6 \cdot 10^{55b} = 20,$$

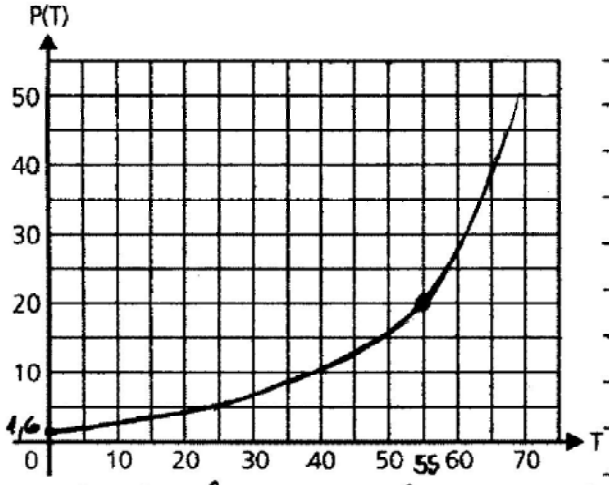
$$10^{55b} = \frac{20}{1{,}6} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2},$$

$$\log(10^{55b}) = \log\left(\frac{25}{2}\right).$$

Logo, $55b = 2\log(5) - \log(2)$, de modo que $55b = 2 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 = 1{,}1$. Assim, temos b = 1,1/55 = 1/50.

Resposta: As constantes são a = 1,6 e b = 1/50.

Exemplo Acima da Média



b) $P(T) = a \cdot 10^{bT}$

$1{,}6 = a \cdot 10^{b \cdot 0} \Rightarrow \boxed{1{,}6 = a}$

$20 = 1{,}6 \cdot 10^{b \cdot 55} \Rightarrow 10^{55 \cdot b} = \frac{20}{1{,}6}$

$10^{55 \cdot b} = \frac{200}{16} \Rightarrow 10^{55b} = \frac{25}{2}$

$\log 10^{55b} = \log\left(\frac{25}{2}\right)$

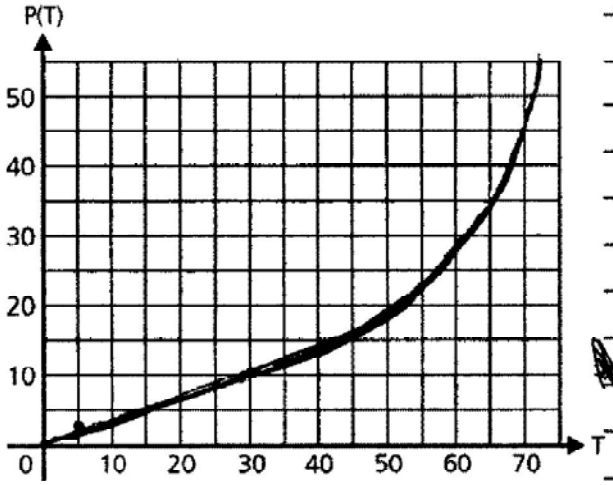
$55 \cdot b \cdot \log 10 = \log 25 - \log 2 \Rightarrow 55b = \log 5^2 - \log 2$

$55b = 2 \cdot \log 5 - \log 2 \Rightarrow 55b = 2 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \Rightarrow 55b = 1{,}1$

$b = \frac{1{,}1}{55} = \frac{11}{550} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{50}}$

a) função exponencial crescente

Exemplo Abaixo da Média



b) $1,6 = a \cdot 10^{55b}$

$20 = a \cdot 10^{55b}$

$a = 0,16$

$20 = 0,16 \cdot 10^{55b}$

$20 = \frac{16}{10} \cdot 10^{55b}$

$20 = \frac{\log 16}{\log 10} \cdot \log 10^{55b}$

$20 = \log 16 \cdot 55b \cdot \log 10$

$20 = \log 2^4 \cdot 55b$

$20 = 4 \cdot \log_{10} 2 \cdot 55b$

$20 = 4 \cdot 0,3 \cdot 55b$

$33b = 20$

$b = \frac{20}{33} \approx 0,6$

Comentários

É gratificante notar que, ao longo dos anos, é crescente o número de candidatos que resolvem corretamente questões que envolvem logaritmos e exponencial. Ainda assim, é grande o número de concluintes do ensino médio com pouca familiaridade com esses tópicos.

No item **a**, muitos candidatos usaram uma reta para representar a função exponencial, enquanto outros traçaram uma curva com concavidade para baixo. Para quem tem dúvidas sobre qual seria uma boa resposta para esse item, o exemplo acima da média é uma boa referência. Observe que o candidato identifica clara e corretamente os pontos dados na tabela, ligando-os com uma curva suave, que tem o formato aproximado da função exponencial. Além disso, a curva se estende além do ponto (55, 20), indicando o comportamento da função para temperaturas mais altas. Já no exemplo abaixo da média, o candidato traça uma curva que não passa pelos pontos indicados e que tem um trecho claramente reto.

A dificuldade do item **b** dessa questão está associada ao emprego das propriedades dos logaritmos e das potências. Observe que o candidato do exemplo abaixo da média escreveu $10^0 = 10$, aplicou o logaritmo em apenas um dos lados da equação, e supôs que log(a/b) = log(a)/log(b) e que log(a.b) = log(a).log(b). Você seria capaz de identificar o erro cometido em cada um desses casos?

Questão 22

Seja dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 6 \\ 0 & 6 & 16x \end{bmatrix},$$

em que x é um número real.

a) Determine para quais valores de x o determinante de A é positivo.

b) Tomando

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

e supondo que, na matriz A, $x = -2$, calcule $B = AC$.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**
Usando a regra de Sarrus para o determinante de uma matriz de ordem 3, obtemos

$$\det(A) = 16x^3 - 36x - 64x = 16x^3 - 100x = 4x(4x^2 - 25).$$

Esse determinante é positivo se $x > 0$ e $4x^2 - 25 > 0$, ou se $x < 0$ e $4x^2 - 25 < 0$.

Observamos que $4x^2 - 25 = 0$ se $x^2 = 25/4$, ou seja, se $x = 5/2$ ou $x = -5/2$. A tabela abaixo fornece o sinal de x, de $4x^2 - 25$ e do determinante de A.

		$-5/2$		0		$5/2$	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$4x^2 - 25$	$+$		$-$		$-$		$+$
$4x(4x^2 - 25)$	$-$		$+$		$-$		$+$

Observamos, então, que o determinante será positivo para $-5/2 < x < 0$ e para $x > 5/2$.

Resposta: O determinante é positivo para $-5/2 < x < 0$ e para $x > 5/2$.

b) **(2 pontos)**
Se $x = -2$, então

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 3 + 2\cdot 4 + 0\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 + (-2)\cdot 4 + 6\cdot(-1) \\ 0\cdot 3 + 6\cdot 4 + (-32)\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 56 \end{bmatrix}.$$

Resposta: $\mathbf{B = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 56 \end{bmatrix}}$.

MATEMÁTICA

Exemplo Acima da Média

a) Calcula-se o determinante de A:

$\det(A) = 16x^3 - (36x + 64x) \therefore \det(A) = 4x(4x^2 - 25)$

Por hipótese, $\det(A) > 0 \Rightarrow 4x(4x^2 - 25) > 0$

(I) $4x > 0 \therefore \boxed{x > 0}$

(II) $4x^2 - 25 > 0 \therefore \boxed{x > 5/2}$ ou $\boxed{x < -5/2}$

• Observe agora a tabela de sinais que ilustra a situação

		$-5/2$		0		$5/2$	
$4x^2-25$	+		−		−		+
$4x$	−		−		+		+
Sinal	−		+		−		+

Portanto, $\boxed{x \in \left]-5/2, 0\right[\cup \left]5/2, +\infty\right[}$

b) $B = A.C \therefore B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \therefore B = \begin{bmatrix} -2.3 + 2.4 + 0.-1 \\ 2.3 - 2.4 + 6.-1 \\ 0.3 + 6.4 + 32 \end{bmatrix}$

$\therefore \boxed{B = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 56 \end{bmatrix}}$

Exemplo Abaixo da Média

a) $\begin{bmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 6 \\ 0 & 6 & 16x \end{bmatrix} \begin{matrix} x & 2 \\ 2 & x \\ 0 & 6 \end{matrix}$

$0x - 36x - 64x + 16x^3 + 0 + 0$

$-36x - 64x + 16x^3 = 0$

$-100x + 16x^3 = 0 \quad /x$

$16x^2 - 100x = 0$

$\Delta = 10000 - 4.a.c$

$\Delta = 10000$

$x_1 = \frac{100 + 100}{2.16} = \frac{200 /2}{32 /2} = \frac{100 /2}{16 /2} = \frac{50}{8} = \boxed{\frac{25}{4}}$

$x_2 = \frac{100 - 100}{2.16} = 0$

Para que o determinante A seja positivo $x = 25/4$

b) $A \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -2.3 & 2.1 & 0.1 \\ 2.4 & -6.1 & 6.1 \\ 0.-1 & 6.1 & -32.1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -32 \end{bmatrix}$

Comentários

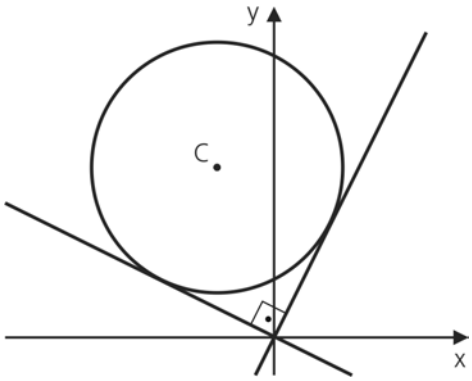
Com o uso intensivo dos computadores, a manipulação de matrizes assumiu um papel importante na resolução de problemas das mais diversas áreas das ciências. Dessa forma, para alcançar um desempenho satisfatório em várias disciplinas da UNICAMP, os alunos ingressantes devem possuir conhecimentos básicos sobre o tema, como os que são exigidos nessa questão.

No Item **a**, o cálculo do determinante de uma matriz 3 x 3 não apresentou grandes dificuldades, apesar de erros nas contas terem sido comuns. Por outro lado, poucos candidatos resolveram corretamente a inequação cúbica. De fato, muitas pessoas nem sequer repararam que era necessário resolver uma inequação, como ilustra o exemplo abaixo da média, no qual o candidato comete outros erros igualmente graves.

O item **b** exigia apenas o cálculo do produto de uma matriz 3 x 3 por um vetor 3 x 1. Apesar disso, o desempenho médio dos candidatos ficou bem aquém do esperado. Respostas nas quais B era uma matriz 3 x 3 (como no exemplo abaixo da média) ou um vetor 1 x 3 foram frequentes, revelando o pouco preparo dos vestibulandos nesse tópico da matemática.

Questão 23

Um círculo de raio 2 foi apoiado sobre as retas $y = 2x$ e $y = -x/2$, conforme mostra a figura abaixo.



a) Determine as coordenadas do ponto de tangência entre o círculo e a reta $y = -x/2$.

b) Determine a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto C, centro do círculo.

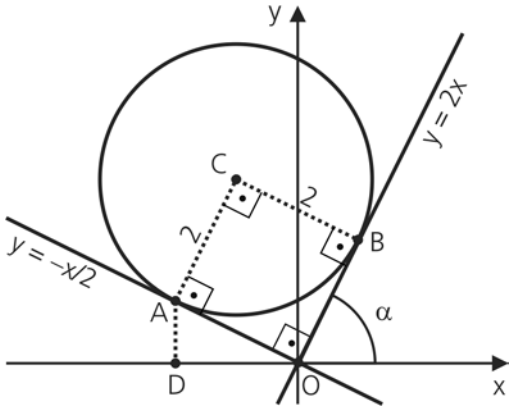
Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Como mostra a figura ao lado, o quadrilátero OACB é um quadrado de lado igual a 2. Assim, a distância entre o ponto A e a origem é igual a 2.

O coeficiente angular da reta que passa por O e A é –1/2, donde AD/OD = 1/2, ou OD = 2AD. Além disso, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OAD, obtemos $OD^2 + AD^2 = 2^2$.

Logo, $(2AD)^2 + AD^2 = 4$, ou seja, $5AD^2 = 4$, ou ainda $AD = 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5$. Assim, $OD = 4/\sqrt{5} = 4\sqrt{5}/5$. Finalmente, como o ponto A está no segundo quadrante, suas coordenadas são $(-4\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$.



Resposta: O ponto de tangência é $(-4\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$.

a') O ponto A tem coordenadas $(x_A, -x_A/2)$. Além disso, como mostra a figura acima, o quadrilátero OACB é um quadrado de lado igual a 2, de modo que a distância entre o ponto A e a origem é igual a 2, ou seja,

$$\sqrt{(x_A - 0)^2 + (-x_A/2 - 0)^2} = 2.$$

Logo, $x_A^2 + x_A^2/4 = 4$, donde $5x_A^2/4 = 4$, ou seja, $x_A^2 = 16/5$. Como o ponto A está no segundo quadrante, temos $x_A = -4/\sqrt{5} = -4\sqrt{5}/5$. Assim, $y_A = -x_A/2 = 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5$.

Resposta: O ponto de tangência é $(-4\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5)$.

b) **(2 pontos)**
Como a reta passa pela origem, seu coeficiente linear é 0. Por outro lado, como a reta é a bissetriz do ângulo AÔB, seu coeficiente angular é dado por $\mathrm{tg}(\alpha + 45°) = [\mathrm{tg}(\alpha) + \mathrm{tg}(45°)]/[1 - \mathrm{tg}(\alpha)\mathrm{tg}(45°)]$. Logo, $\mathrm{tg}(\alpha + 45°) = (2+1)/(1-2.1) = -3$, e a reta desejada é y = –3x.

Resposta: A reta que passa pela origem e pelo ponto C tem equação y = –3x.

b') A reta que passa pelos pontos A e C tem coeficiente angular 2, de modo que $(y_C - y_A)/(x_C - x_A) = 2$, ou $(y_C - y_A) = 2(x_C - x_A)$. Como a distância entre A e C é igual a 2, concluímos que $(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 4$. Logo, $5(x_C - x_A)^2 = 4$, ou $x_C - x_A = 2\sqrt{5}/5$. Assim, $y_C - y_A = 4\sqrt{5}/5$, e $C = (-4\sqrt{5}/5 + 2\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5)$, ou $C = (-2\sqrt{5}/5, 6\sqrt{5}/5)$.
Como a reta desejada passa pela origem, seu coeficiente linear é 0. Por outro lado, a reta passa pelo ponto C, de modo que seu coeficiente angular é dado por $(y_C - 0)/(x_C - 0) = 6\sqrt{5}/5/(-2\sqrt{5}/5) = -3$. Logo, a reta tem equação y = –3x.

Resposta: A reta que passa pela origem e pelo ponto C tem equação y = –3x.

b'') O ponto C é equidistante das retas y = 2x e y = –x/2. Reescrevendo essas retas, dizemos que C é equidistante de –2x + y = 0 e de x + 2y = 0. Usando, então, a fórmula da distância entre ponto e reta, temos

$$\frac{|-2x_C + y_C|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{|x_C + 2y_C|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2.$$

Logo, $|-2x_C + y_C| = 2\sqrt{5}$ e $|x_C + 2y_C| = 2\sqrt{5}$. Como $x_C < 0$ e $|y_C| > x_C$, temos o sistema linear

$$\begin{cases} -2x_C + y_C &= 2\sqrt{5} \\ x_C + 2y_C &= 2\sqrt{5} \end{cases},$$

cuja solução é $x_C = -2\sqrt{5}/5$, $y_C = 6\sqrt{5}/5$.
Como a reta desejada passa pela origem, seu coeficiente linear é 0. Por outro lado, a reta passa pelo ponto C, de modo que seu coeficiente angular é dado por $(y_C - 0)/(x_C - 0) = 6\sqrt{5}/5/(-2\sqrt{5}/5) = -3$. Logo, a reta tem equação y = –3x.

Resposta: A reta que passa pela origem e pelo ponto C tem equação y = –3x.

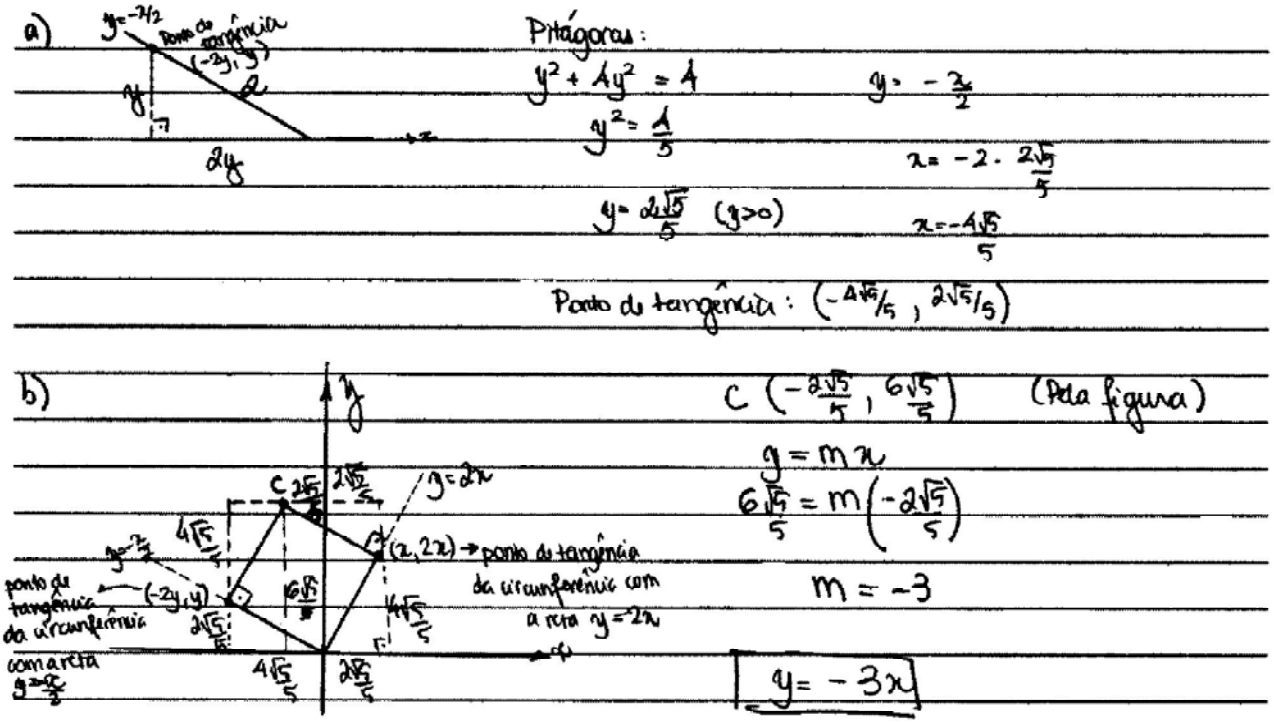
b’’’) A reta desejada é a reta suporte da bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Dessa forma, os pontos dessa reta são equidistantes das retas y = 2x e y = –x/2, ou seja, são equidistantes de –2x + y = 0 e de x + 2y = 0. Assim, tomando um ponto (x, y) qualquer dessa reta, temos

$$\frac{|-2x+y|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}} = \frac{|x+2y|}{\sqrt{1^2+2^2}}.$$

Logo, $|-2x+y| = |x+2y|$. As soluções dessa equação são soluções de $-2x+y = x+2y$ ou de $-2x+y = -x-2y$. Isolando y na primeira equação, obtemos y = –3x. Já a segunda equação fornece y = x/3. Como a reta desejada passa pelo segundo e pelo quarto quadrantes, sua equação é y = –3x.

Resposta: A reta que passa pela origem e pelo ponto C tem equação y = –3x.

Exemplo Acima da Média



MATEMÁTICA

Exemplo Abaixo da Média

A distância do raio C às duas ~~circunferências~~ retas é a mesma, logo:

Como já se sabe que:

$|2x_C - y_C| = |x_C + 2y_C| = 2\sqrt{5}$ $\quad x_C < 0$ e $y_C > 0$

$$\begin{cases} 2x_C - y_C = 2\sqrt{5} \\ -2x_C - 4y_C = -4\sqrt{5} \end{cases}$$

$$-5y_C = -2\sqrt{5}$$

$$y_C = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad x_C = \frac{-6\sqrt{5}}{5}$$

a) O ângulo formado entre a reta e o eixo x = 30°

$\sin 30° = \frac{y_t}{2}$ $\quad y_t = 1$ $\quad \cos 30° = \frac{x_t}{2}$ $\quad x_t = -\sqrt{3}$

O ponto de tangência é $(-\sqrt{3}, 1)$

b) O ponto C é $\left(\frac{-6\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$. Logo, $m = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5} - 0}{\frac{-6\sqrt{5}}{5} - 0} = \frac{-1}{3}$

$y - 0 = \frac{-1}{3}(x - 0)$ $\quad y = \frac{-x}{3}$ é a equação pedida.

Comentários

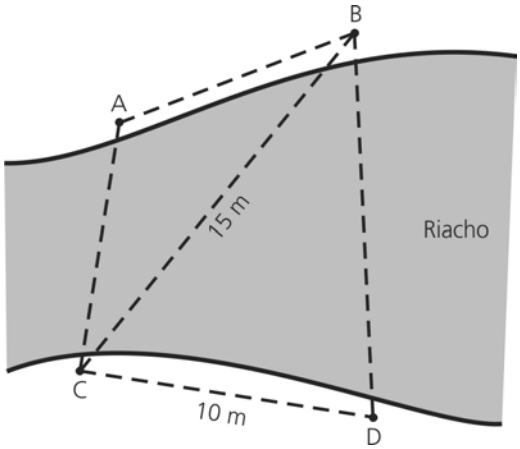
Essa questão foi a mais difícil da prova, não só porque os alunos do ensino médio consideram a geometria analítica um tema árido, mas também porque a sua resolução exigia mais contas que as demais questões. E apesar de o número de respostas em branco ter sido alto, é bom lembrar que questões assim podem ser determinantes na seleção para aqueles cursos em que, na segunda fase do vestibular, há 8 candidatos concorrendo por uma vaga.

O exemplo acima da média mostra uma resolução engenhosa para o item **b**. O candidato inscreve o quadrado OACB em outro quadrado com lados paralelos aos eixos coordenados, obtendo facilmente as coordenadas do ponto C e, consequentemente, a equação da reta que passa por esse ponto e pela origem.

No exemplo abaixo da média, o candidato tenta encontrar as coordenadas do ponto C já no item **a**. Entretanto, erra o sinal ao retirar o módulo de uma das equações e chega a um ponto incompatível com o desenho. Em seguida, o candidato supõe erroneamente que a reta y = – x/2 faz um ângulo de 30º com o eixo x, obtendo coordenadas diferentes das esperadas. No item **b**, esse candidato não percebe que a reta por ele encontrada nem sequer toca o círculo com centro em C, passando abaixo da reta y = –x/2 no segundo quadrante. Se você pretende resolver questões de matemática, aqui vai uma boa dica: nunca deixe de conferir se sua resposta está de acordo com o que é apresentado no enunciado.

Questão 24

Um topógrafo deseja calcular a distância entre pontos situados à margem de um riacho, como mostra a figura a seguir. O topógrafo determinou as distâncias mostradas na figura, bem como os ângulos especificados na tabela abaixo, obtidos com a ajuda de um teodolito.



Visada	Ângulo
$A\hat{C}B$	$\pi/6$
$B\hat{C}D$	$\pi/3$
$A\hat{B}C$	$\pi/6$

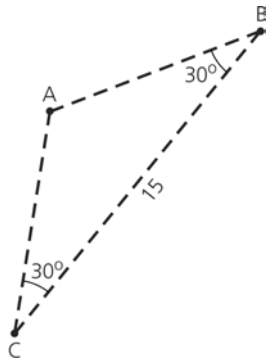
a) Calcule a distância entre A e B.

b) Calcule a distância entre B e D.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 180 – 30 – 30 = 120º. Aplicando a lei dos senos ao triângulo ABC, obtemos

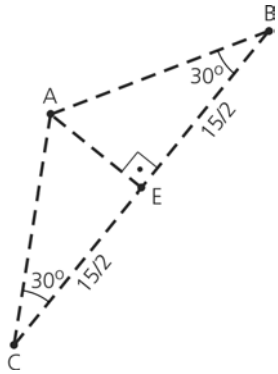


$$\frac{CB}{\text{sen}(B\hat{A}C)} = \frac{AB}{\text{sen}(A\hat{C}B)} \quad \text{ou} \quad \frac{15}{\sqrt{3}/2} = \frac{AB}{1/2}.$$

$$\text{Logo, } AB = \frac{15 \cdot 1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \text{ m.}$$

Resposta: A distância entre A e B é igual a $5\sqrt{3}$ m.

a') O triângulo ABC é isósceles, de modo que AB = AC. Tomando E como o ponto médio do segmento BC, observamos que o triângulo ABE é retângulo. Desse modo,



$$\cos(A\hat{B}E) = \frac{(15/2)}{AB}, \text{ ou } \cos(30°) = \frac{(15/2)}{AB}, \text{ ou ainda } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(15/2)}{AB}.$$

$$\text{Logo, } AB = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \text{ m.}$$

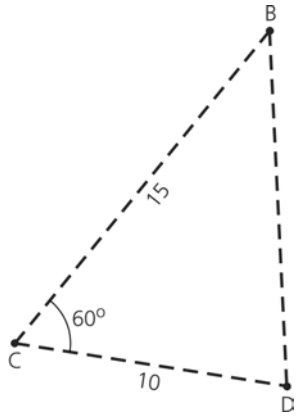
Resposta: A distância entre A e B é igual a $5\sqrt{3}$ m.

a'') Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 180 – 30 – 30 = 120º. Além disso, o triângulo ABC é isósceles, de modo que AB = AC. Aplicando, então, a lei dois cossenos ao triângulo ABC, obtemos

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(C\hat{A}B),$$
$$15^2 = 2AB^2 - 2 \cdot AB^2 \cdot \cos(120°),$$
$$15^2 = 2AB^2 - 2 \cdot AB^2 \cdot (-1/2).$$

Logo, $3AB^2 = 15^2$, donde $AB = \dfrac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$ m.

Resposta: A distância entre A e B é igual a $5\sqrt{3}$ m.



b) **(2 pontos)**
Aplicando, agora, a lei dos cossenos ao triângulo BCD, obtemos

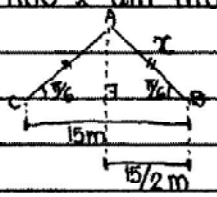
$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos(B\hat{C}D) = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 1/2 = 175.$$

Logo, $BD = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$ m.

Resposta: A distância entre B e D é igual a $5\sqrt{7}$ m.

Exemplo Acima da Média

a) Seja x, a distância entre A e B. Como $A\hat{C}B = A\hat{B}C = \pi/6$, podemos saber que ΔABC é um triângulo isósceles. Calculando então, através de Teorema de ~~Pitágoras~~: Seno e Cosseno:

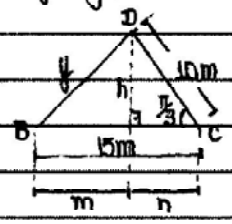


$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{15/2}{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15/2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{15/2 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$$

Logo, $x = AB = 5\sqrt{3}$ m

Portanto, a distância entre A e B é de $5\sqrt{3}$ m.

b) Seja y, a distância entre B e D; $B\hat{C}D = \pi/3$



$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{h}{10} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{10} \quad \therefore h = 5\sqrt{3}\text{ m}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{n}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{n}{10} \quad n = 5\text{m} \quad \therefore m = 10\text{ m}$$

Logo, através de Teorema de Pitágoras: $y^2 = h^2 + m^2 \Leftrightarrow y^2 = 75 + 100 = 175 \quad y = \sqrt{175}$ m.

Portanto, a distância entre B e D é de $\sqrt{175}$ m

MATEMÁTICA

Exemplo Abaixo da Média

a-) $\operatorname{sen} \pi/6 = \frac{1}{2} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{15}{2} = 7{,}5\,m$

b-) $\operatorname{sen} \pi/3 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{15} \rightarrow y = \frac{15\sqrt{3}}{2} = 7{,}5\sqrt{3}\,m$ ou $y \simeq 7{,}5 \cdot 1{,}73 \simeq 12{,}97\,m$

Respostas: a-) A distância entre A e B é de 7,5 m
b-) A distância entre B e D é de aproximadamente 13 m

Comentários

Apesar de difícil, uma questão de trigonometria como essa é sempre instigante, pois há muitos caminhos que levam à resposta correta. Como todos esses caminhos são igualmente aceitos, o vestibulando deve se sentir à vontade para seguir aquele que considera mais rápido. O candidato do exemplo acima da média, por exemplo, resolveu os dois itens sem usar a lei dos senos ou a lei dos cossenos, seguindo uma estratégia simples e elegante. Por sua vez, o candidato do exemplo abaixo da média perdeu os pontos da questão por usar uma estratégia totalmente errada, já que supôs que os triângulos ABC e BCD eram retângulos, apesar de a figura e a tabela indicarem claramente o contrário.