1ª Fase • Matemática

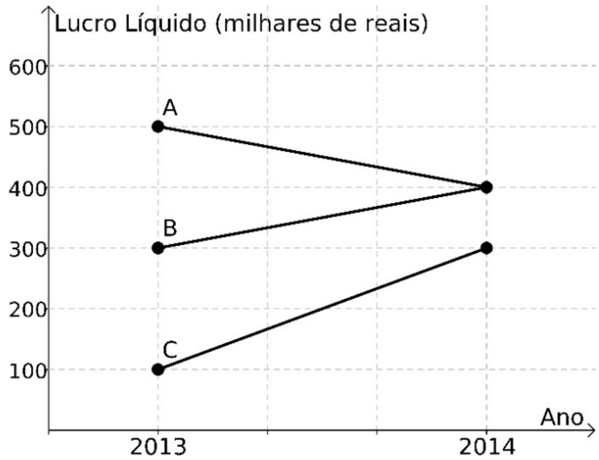
UNICAMP vestibular 2016

Introdução

O objetivo da prova de Matemática da primeira fase foi avaliar os candidatos quanto aos conhecimentos da área desenvolvidos na educação básica. Os enunciados das questões foram curtos e diretos, não apresentando dificuldades de interpretação. Diferentes tópicos do programa foram igualmente distribuídos ao longo da prova.

Questão 41

O gráfico abaixo exibe o lucro líquido (em milhares de reais) de três pequenas empresas A, B e C, nos anos de 2013 e 2014.



Com relação ao lucro líquido, podemos afirmar que

a) A teve um crescimento maior do que C.

b) C teve um crescimento maior do que B.

c) B teve um crescimento igual a A.

d) C teve um crescimento menor do que B.

Objetivo da Questão

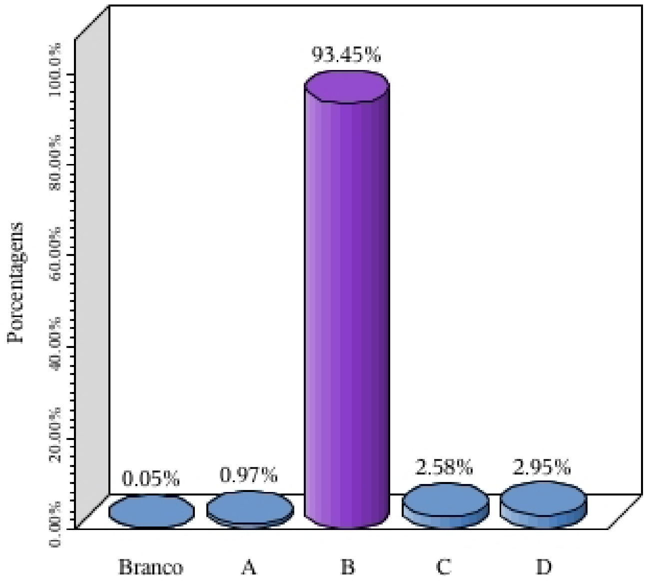
Avaliar a capacidade de extrair e interpretar informações quantitativas fornecidas através de um gráfico.

Alternativa Correta: **b**

O lucro líquido da empresa A caiu de 500 mil reais em 2013 para 400 mil reais em 2014, um decréscimo de 100 em 500, ou seja, de 20%. No mesmo período, o lucro líquido da empresa B subiu de 300 mil reais para 400 mil reais, um crescimento de aproximadamente 33%. Para a empresa C, o lucro líquido subiu de 100 mil reais para 300 mil reais, ou seja, um crescimento de 200%. A única alternativa correta é a que afirma que C teve um crescimento maior do que B.

1ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais

A alta porcentagem de acertos indica que a questão foi de muito fácil resolução, fato esperado para uma questão simples sobre interpretação de gráficos.

Questão 42

Uma moeda balanceada é lançada quatro vezes, obtendo-se cara exatamente três vezes. A probabilidade de que as caras tenham saído consecutivamente é igual a

a) 1/4.

b) 3/8.

c) 1/2.

d) 3/4.

Objetivo da Questão

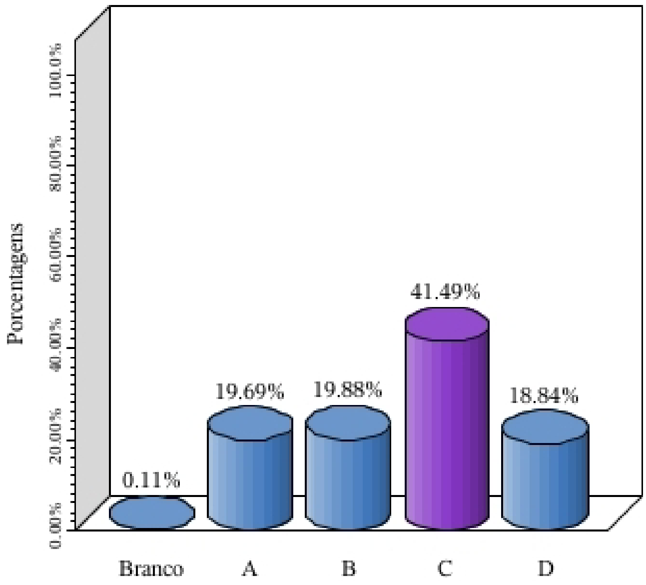
Avaliar a noção básica de probabilidade.

Alternativa Correta: **c**

Em um lançamento da moeda, denotemos por C a saída de cara e por K a saída de coroa. Em quatro lançamentos, temos quatro eventos possíveis de saírem exatamente três caras: KCCC, CKCC, CCKC e CCCK. Portanto, para que as caras tenham saído consecutivamente, temos 2 eventos favoráveis num total de 4 eventos possíveis, ou seja, uma probabilidade de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

1ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais

Essa questão é de fácil resolução, envolvendo apenas o cálculo da proporção entre o número de eventos favoráveis e o número de eventos possíveis. Como pode ser observado no gráfico acima, aproximadamente 41% dos candidatos assinalaram a resposta correta. O fato de as porcentagens obtidas nas outras alternativas serem muito semelhantes parece indicar escolha ao acaso (chute).

Questão 43

Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. O número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas é igual a

a) 12.

b) 15.

c) 16.

d) 20.

Objetivo da Questão

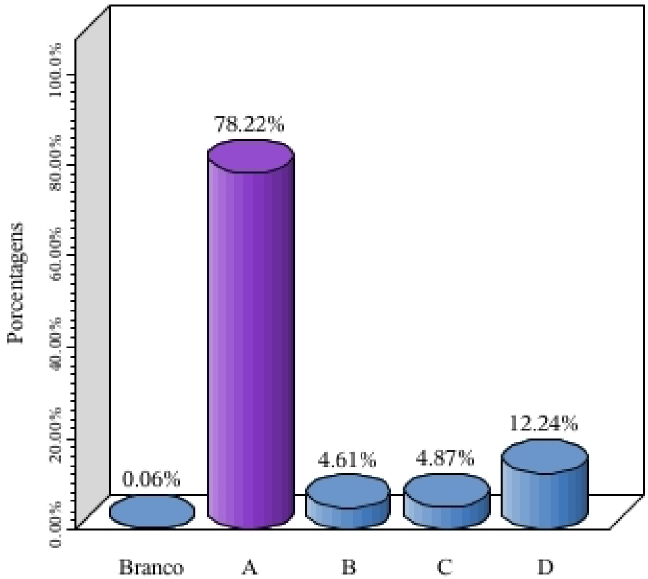
Efetuar uma operação simples de contagem em uma matriz.

Alternativa Correta: **a**

Em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas, o número de elementos internos é igual ao número de elementos de uma matriz com duas linhas e duas colunas a menos, ou seja, de uma matriz com 3 linhas e 4 colunas. Portanto, um total de $3 \times 4 = 12$ elementos. A matriz exibida a seguir, onde os elementos internos estão indicados por I e os não internos por E, auxilia a compreensão da resolução.

$$\begin{bmatrix} E & E & E & E & E & E \\ E & I & I & I & I & E \\ E & I & I & I & I & E \\ E & I & I & I & I & E \\ E & E & E & E & E & E \end{bmatrix}$$

Desempenho dos candidatos

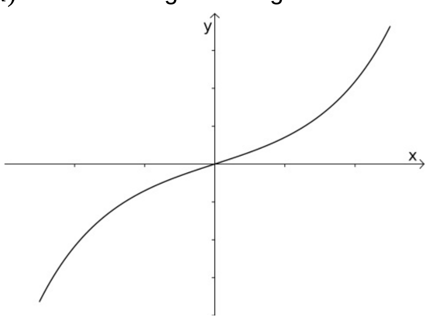


Comentários Gerais

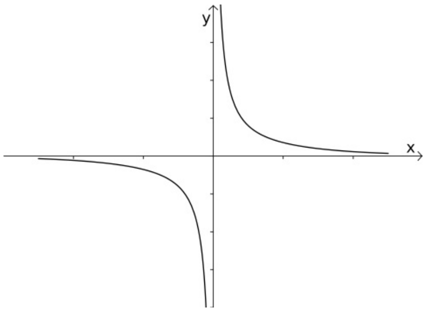
A questão tem uma resolução muito simples, exigindo apenas atenção na contagem de linhas e colunas consideradas. Acreditamos que a porcentagem mais elevada na alternativa d, em relação a b e c, se deva ao fato de os candidatos terem removido apenas 2 linhas ou 2 colunas, chegando erroneamente ao resultado $(5-1)\times(6-1)=4\times5=20$.

Questão 44

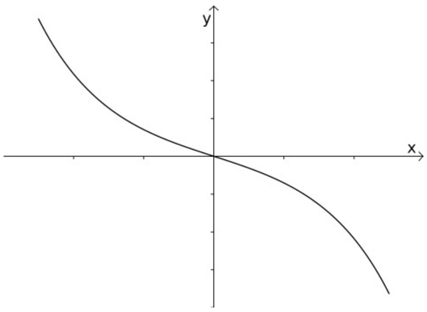
Considere o gráfico da função $y = f(x)$ exibido na figura a seguir.



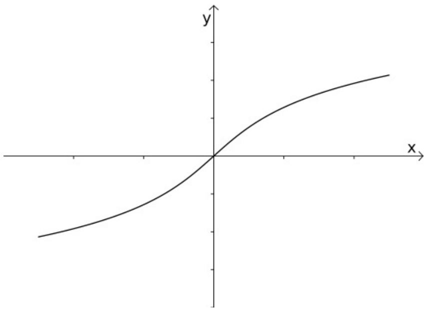
O gráfico da função inversa $y = f^{-1}(x)$ é dado por a)



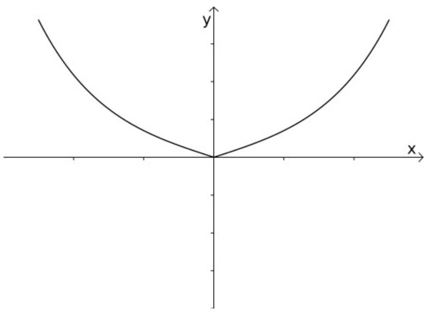
b)



c)



d)



Objetivo da Questão

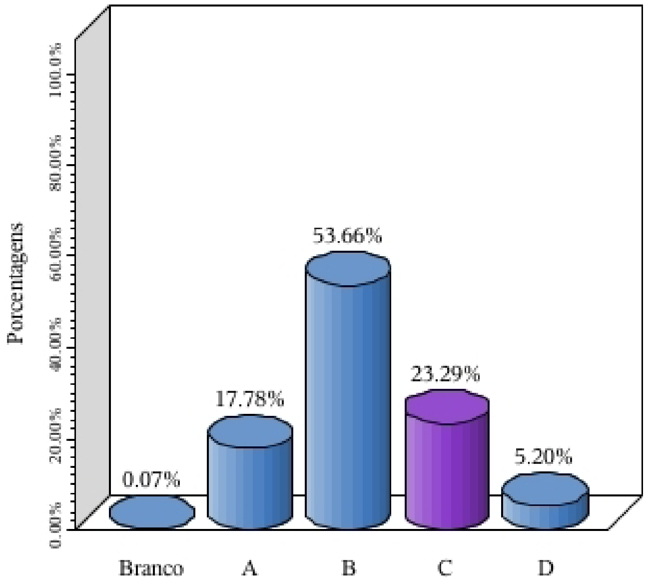
Para uma função f representada graficamente no plano cartesiano, reconhecer o gráfico da sua inversa f^{-1}.

Alternativa Correta: c

Pela definição de função inversa, se $b = f(a)$ então $f^{-1}(b) = a$. Portanto, como $f(0) = 0$, devemos ter que $f^{-1}(0) = 0$. Além disso, para $x > 0$, temos $f(x) > 0$ e para $x < 0$, temos $f(x) < 0$. Logo, a função inversa deve assumir valores positivos para $x > 0$ e valores negativos para $x < 0$. Assim, o único gráfico que apresenta todas essas características é o exibido na alternativa **c**.

1ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais

A maioria dos candidatos optou pela alternativa **b** que, na verdade, exibe o gráfico de $y = -f(x)$. Merece também destaque o fato de que muitos candidatos assinalaram a alternativa **a**, que exibe o gráfico de $y = f(x)^{-1} = 1/f(x)$, para $x \neq 0$.

Questão 45

Considere a função afim $f(x) = ax + b$ definida para todo número real x, onde a e b são números reais. Sabendo que $f(4) = 2$, podemos afirmar que $f(f(3) + f(5))$ é igual a

a) 5.

b) 4.

c) 3.

d) 2.

Objetivo da Questão

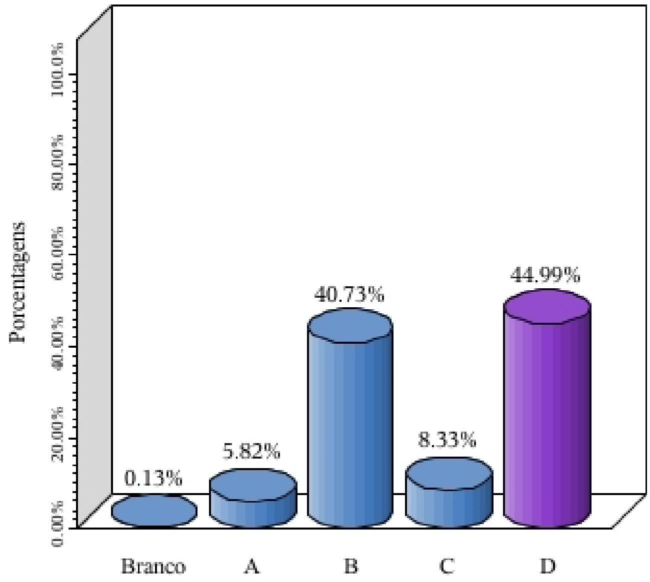
Efetuar operações com composições de uma função afim.

Alternativa Correta: **d**

Temos que $f\big(f(3) + f(5)\big) = f(3a + b + 5a + b) = f(8a + 2b) = f\big(2 \times (4a + b)\big) = f\big(2 \times f(4)\big)$.
Do enunciado, $f(4) = 2$ e, portanto, $f\big(f(3) + f(5)\big) = f(2 \times 2) = f(4) = 2$.

1ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais

Apesar de a questão envolver cálculos muito simples, observamos uma alta porcentagem de escolha da alternativa **b**, o que atribuímos à falta de atenção dos candidatos no final da resolução, indicando o valor de $f(3)+f(5)=4$ ao invés de $f(f(3)+f(5))=2$.

Questão 46

A solução da equação na variável real x, $\log_x(x+6)=2$, é um número

a) primo.

b) par.

c) negativo.

d) irracional.

Objetivo da Questão

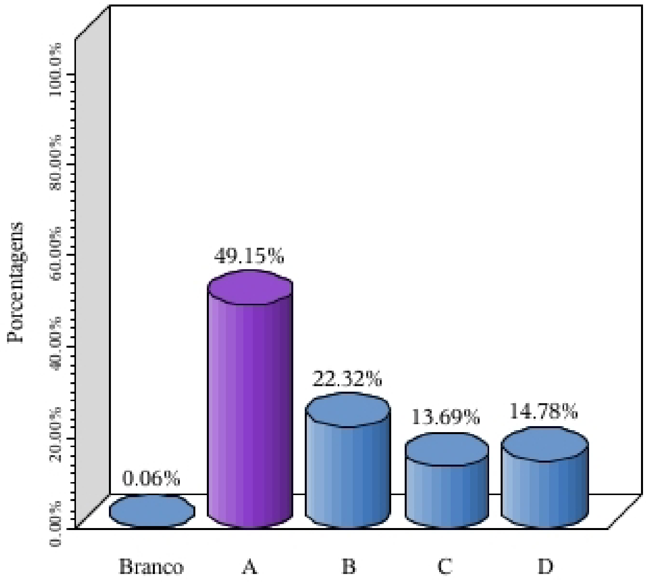
Aplicar a definição de logaritmo na resolução de uma equação, analisar as condições de existência e resolver a equação quadrática resultante.

Alternativa Correta: a

Da definição de logaritmo, devemos ter que $x^2 = x + 6$, $x > 0$, $x \neq 1$ e $x + 6 > 0$. A equação anterior pode ser reescrita como $x^2 - x - 6 = 0$, uma equação quadrática (polinomial de grau 2). O discriminante dessa equação é igual a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$, sendo $\sqrt{\Delta} = 5$. Assim, as raízes da equação quadrática são $x = \frac{1-5}{2} = -2$ ou $x = \frac{1+5}{2} = 3$. Como é necessário que $x > 0$, a única solução possível é $x = 3$. Das alternativas apresentadas, a única correta é a que afirma que a solução é um número primo.

1ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais
Apesar de a porcentagem de acertos ser de aproximadamente 50%, esperava-se uma porcentagem maior de respostas corretas, pela simplicidade da questão. Tal resultado reflete a dificuldade recorrente dos candidatos em relação a logaritmos.

Questão 47
Seja (a,b,c) uma progressão geométrica de números reais com $a \neq 0$. Definindo $s = a + b + c$, o menor valor possível para s/a é igual a

a) 1/2.

b) 2/3.

c) 3/4.

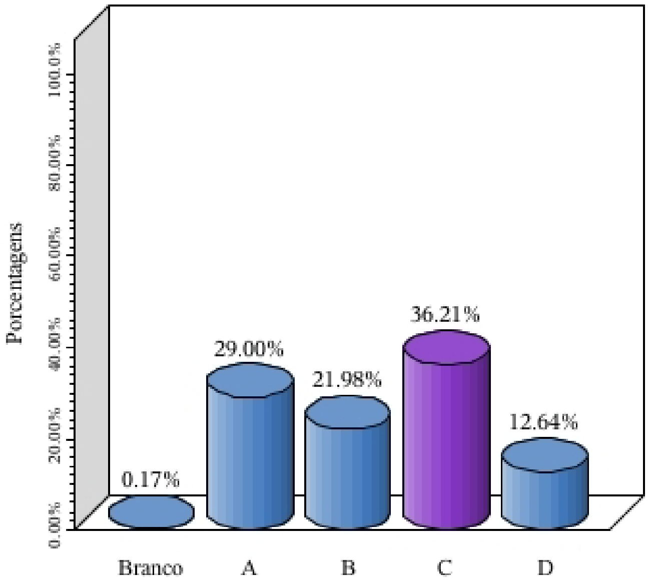
d) 4/5.

Objetivo da Questão
Avaliar o conceito de progressão geométrica e a capacidade de manipulação algébrica de um polinômio do segundo grau (função quadrática).

Alternativa Correta: **c**
Como (a,b,c) é uma progressão geométrica (PG), podemos escrever que $b = a \times q$ e $c = b \times q = a \times q^2$, onde q é um número real que denota a razão da PG. Assim, como $a \neq 0$, temos que $\frac{s}{a} = \frac{(a+aq+aq^2)}{a} = 1 + q + q^2$. Completando o quadrado, obtemos $\frac{s}{a} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + q + q^2 = \left(\frac{1}{4} + q + q^2\right) + \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2} + q\right)^2 + \frac{3}{4}$. Como o primeiro termo é sempre não negativo (maior ou igual a zero), temos que o valor mínimo para s/a é igual a $\frac{3}{4}$. Outra maneira de resolver o problema é identificar a expressão $1 + q + q^2$ como uma função quadrática na variável real q e computar a ordenada do vértice da parábola dada pelo gráfico da função, que neste caso tem

concavidade positiva ("boca para cima"), pois o coeficiente do termo quadrático é positivo. Como a abscissa do vértice é igual a $v = -1/2$, a ordenada é dada por $V = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 3/4$.

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais

O índice de acerto relativamente baixo é compatível com o grau de dificuldade da questão, que envolve a integração de tópicos diferentes do programa: progressões e funções quadráticas.

Questão 48

Considere o sistema linear nas variáveis reais x, y, z e w,

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ y + z = 2, \\ w - z = 3. \end{cases}$$

Logo, a soma $x + y + z + w$ é igual a

a) -2.

b) 0.

c) 6.

d) 8.

Objetivo da Questão

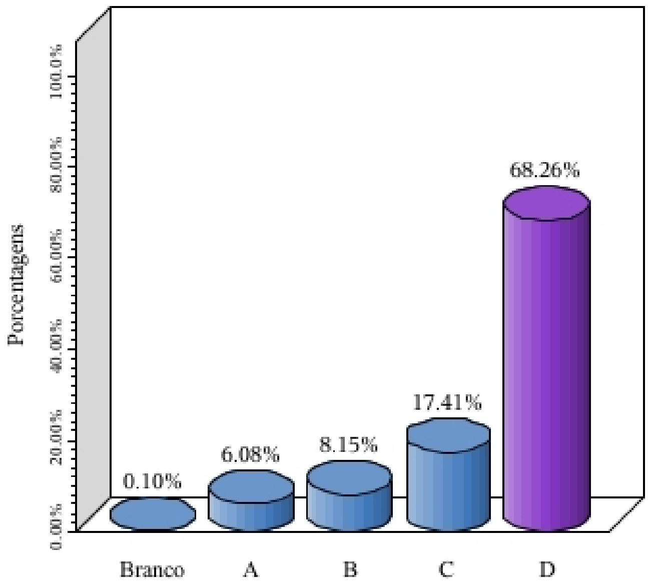
Manipular as variáveis de um sistema linear não quadrado e indeterminado.

1ª Fase • Matemática

Alternativa Correta: d

Primeiramente, vamos escrever todas as variáveis em termos da variável x. Da primeira equação, temos $y = x - 1$. Na segunda equação, obtemos $x - 1 + z = 2$, ou seja, $z = 3 - x$. Novamente, efetuando a substituição na terceira equação, temos $w - (3 - x) = 3$, isto é, $w = 6 - x$. Portanto, $x + y + z + w = x + x - 1 + 3 - x + 6 - x = 8$.

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais

A alta porcentagem de acertos indica que os candidatos são capazes de manipular as equações de sistemas lineares não necessariamente quadrados.

Questão 49

Considere a matriz quadrada de ordem 3, $A = \begin{bmatrix} \cos x & 0 & -\operatorname{sen} x \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$, onde x é um número real.

Podemos afirmar que

a) A não é invertível para nenhum valor de x.

b) A é invertível para um único valor de x.

c) A é invertível para exatamente dois valores de x.

d) A é invertível para todos os valores de x.

1ª Fase • Matemática

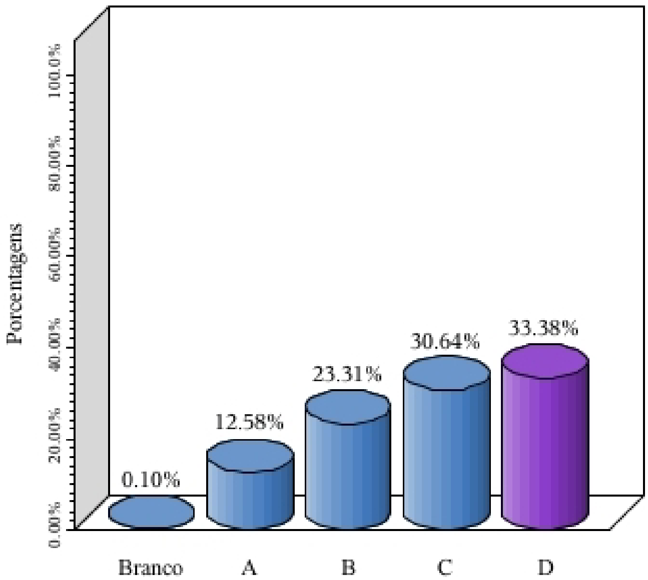
Objetivo da Questão

Analisar a invertibilidade de uma matriz quadrada através do seu determinante.

Alternativa Correta: **d**

Uma matriz quadrada é invertível se e somente se seu determinante é diferente de zero. Computando o determinante da matriz A, obtemos $\det(A) = (\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$. Logo, como o determinante é diferente de zero para todos os valores do número real x, a única alternativa correta é a que afirma que a matriz A é invertível para todos os valores de x.

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais

Apesar de o cálculo do determinante ser simples, houve a baixa porcentagem de acertos, o que acreditamos se dever à forma como as alternativas estavam enunciadas, exigindo uma leitura mais atenta.

Questão 50

Considere o círculo de equação cartesiana $x^2 + y^2 = ax + by$, onde a e b são números reais não nulos. O número de pontos em que esse círculo intercepta os eixos coordenados é igual a

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

Objetivo da Questão

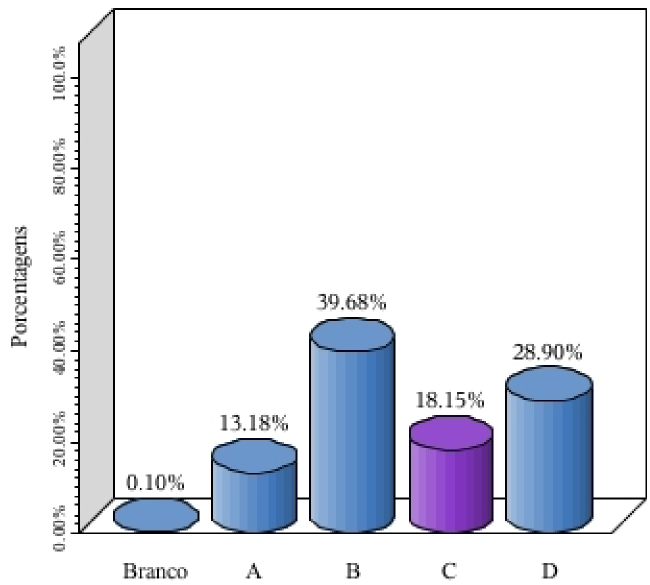
Encontrar as intersecções de um círculo, dado pela sua equação cartesiana, com os eixos coordenados.

1ª Fase • Matemática

Alternativa Correta: c

Para determinar os pontos onde o círculo dado intercepta os eixos coordenados, primeiramente fixamos $x = 0$ e determinamos as intersecções com o eixo das ordenadas. Assim, substituindo $x = 0$ na equação que define o círculo, resulta $y^2 = by$, cujas soluções são $y = 0$ ou $y = b$. As intersecções com o eixo das ordenadas são então $(0,0)$ e $(0, b)$. Analogamente, fixamos $y = 0$ e determinamos as intersecções com o eixo das abscissas. Temos, então, $x^2 = ax$, cujas soluções são $x = 0$ ou $x = a$. Assim, as intersecções com o eixo das abscissas são $(0,0)$ e $(a, 0)$. Conforme o enunciado, a e b são não nulos e, portanto, o número de pontos em que esse círculo intercepta os eixos coordenados é igual a 3.

Desempenho dos candidatos

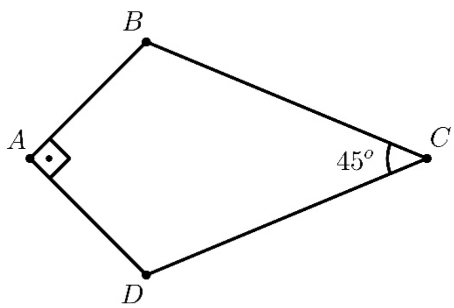


Comentários Gerais

Acreditamos que a maior porcentagem de indicação da alternativa **b** se deva à falta de atenção dos candidatos na resolução das equações $x^2 = ax$ e $y^2 = by$, ao se esquecerem das soluções triviais $x = 0$ e $y = 0$, resultando erroneamente num total de 2 pontos. Em relação à porcentagem de indicação da alternativa **d**, uma explicação pode ser a contagem repetida da origem $(0,0)$.

Questão 51

A figura abaixo exibe um quadrilátero ***ABCD***, onde *AB = AD e BC = CD = 2 cm*. A área do quadrilátero ***ABCD*** é igual a



a) $\sqrt{2}\ cm^2$.

b) $2\ cm^2$.

c) $2\sqrt{2}\ cm^2$.

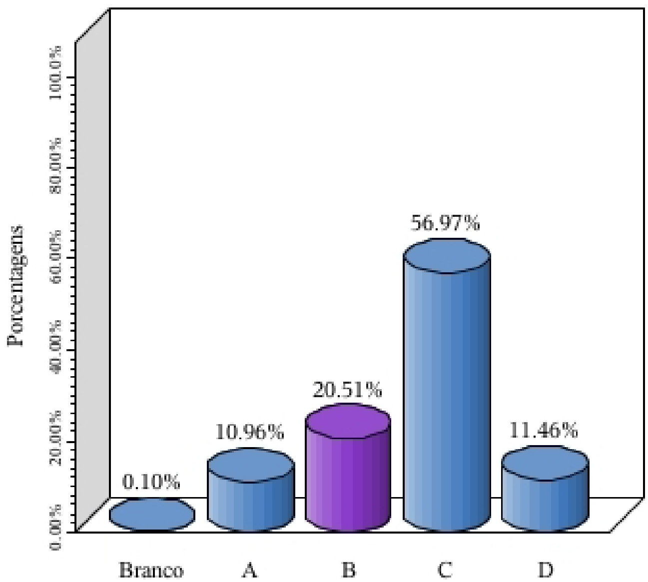
d) $3\ cm^2$.

1ª Fase • Matemática

Objetivo da Questão
Avaliar o conhecimento sobre a lei dos cossenos e área de triângulos.

Alternativa Correta: b
Primeiramente, consideramos o triângulo ***BCD*** e aplicamos a lei dos cossenos ao lado $\overline{BD}$: $(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 - 2 \times (BC) \times (CD) \times \cos 45^o$. Usando os dados do enunciado, temos que $(BD)^2 = 4 + 4 - 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4(2 - \sqrt{2})$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ***ABD***, $(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 = 2 \times (AB)^2$, obtemos $4(2 - \sqrt{2}) = 2 \times (AB)^2$, ou seja, $(AB)^2 = 2(2 - \sqrt{2})$. Para computar a área do quadrilátero ***ABCD*** somamos a área do triângulo ***ABD***, $A_1 = \frac{1}{2} \times (AB) \times (AB) = \frac{1}{2} \times (AB)^2 = 2 - \sqrt{2}$, com a área do triângulo ***BCD***, $A_2 = \frac{1}{2} \times (BC) \times (CD) \times \text{sen}\, 45^o = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Assim, a área do quadrilátero ***ABCD*** é igual a $A_1 + A_2 = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\ cm^2$.

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais
A baixa porcentagem de respostas corretas era esperada, pela dificuldade da questão. Porém, é de surpreender que a grande maioria dos candidatos tenha indicado uma alternativa errada, que exibe um valor que não parece estar associado a nenhum cálculo usual de área de triângulos.

Questão 52
Um cilindro circular reto, cuja altura é igual ao diâmetro da base, está inscrito numa esfera. A razão entre os volumes da esfera e do cilindro é igual a

a) $4\sqrt{2}/3$.

b) $4/3$.

c) $3\sqrt{2}/4$.

d) $\sqrt{2}$.

1ª Fase • Matemática

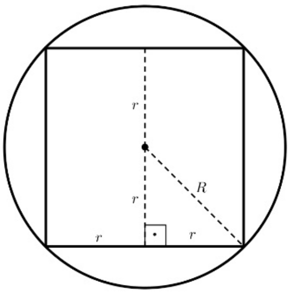
UNICAMP vestibular 2016

Objetivo da Questão

Calcular os volumes de um cilindro e de uma esfera.

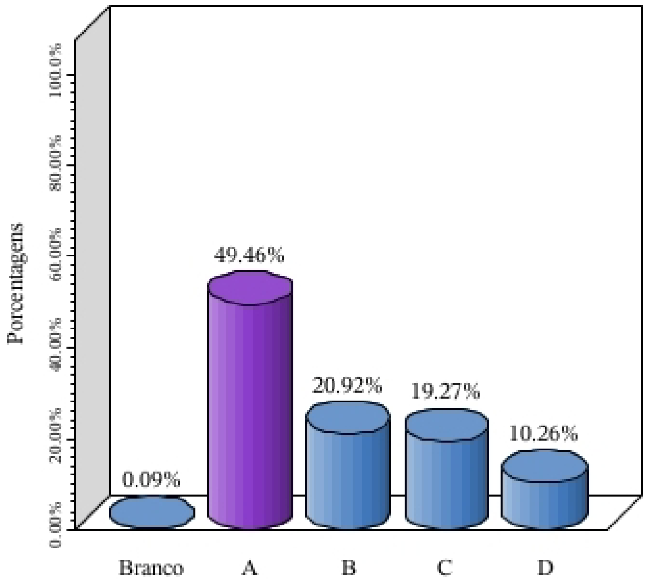
Alternativa Correta: a

A figura abaixo exibe um corte transversal de um cilindro circular reto com raio da base igual a r e altura igual a $2r$, inscrito numa esfera de raio R.



O volume da esfera é igual a $V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$ e o volume do cilindro é igual a $V_c = \pi r^2 \times (2r) = 2\pi r^3$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo indicado na figura, obtemos $R^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$, ou seja, $\frac{R}{r} = \sqrt{2}$. Portanto, a razão entre os volumes da esfera e do cilindro é igual a $\frac{V_e}{V_c} = \frac{4\pi R^3}{3} \times \frac{1}{2\pi r^3} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{R}{r}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{2}\right)^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais

A porcentagem de acertos demonstra que os candidatos têm conhecimentos razoáveis sobre o cálculo de volumes de sólidos geométricos simples.

1ª Fase • Matemática

Questão 53

Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + x^2 - ax - 3$, onde a é um número real. Sabendo que r e $-r$ são raízes reais de $p(x)$, podemos afirmar que $p(1)$ é igual a

a) 3.

b) 1.

c) -2.

d) -4.

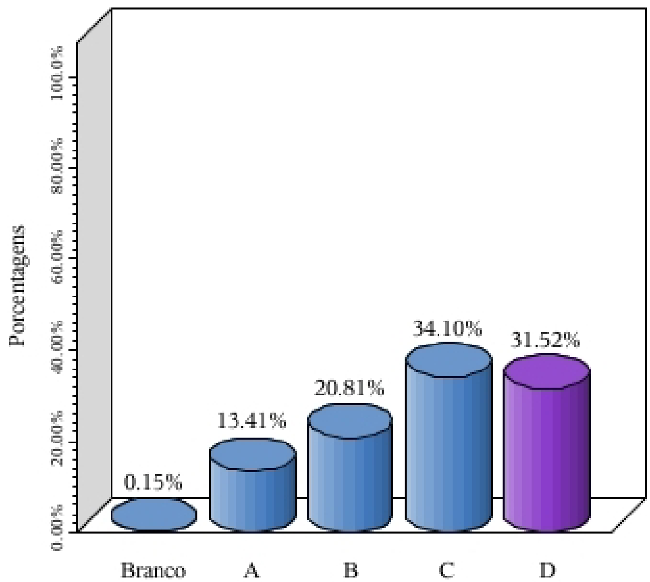
Objetivo da Questão

Avaliar o conhecimento dos candidatos sobre polinômios com coeficientes reais e suas raízes.

Alternativa Correta: **d**

Como r e $-r$ são raízes reais de $p(x)$, temos que $p(r) = r^3 + r^2 - ar - 3 = 0$ e $p(-r) = (-r)^3 + (-r)^2 - a(-r) - 3 = -r^3 + r^2 + ar - 3 = 0$. Somando as duas equações, obtemos $2r^2 - 6 = 0$, ou seja, $r^2 = 3$. Analogamente, subtraindo as duas equações, obtemos $2r^3 - 2ar = 0$. Como sabemos que $r \neq 0$, podemos afirmar que $a = r^2 = 3$. Logo, $p(1) = 1^3 + 1^2 - a \times 1 - 3 = 1 + 1 - 3 - 3 = -4$.

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais

Apesar de a resolução não apresentar grandes dificuldades, como o tópico de polinômios é geralmente pouco trabalhado no ensino médio, a maior porcentagem dos candidatos optou por uma resposta incorreta, a alternativa **c**. Talvez a razão dessa escolha se deva à desatenção, ou mesmo à pressa do candidato, que assume $a = 1$, o que resulta em $p(1) = 1 + 1 - 1 - 3 = -2$.

1ª Fase • Matemática

Questão 54

Considere o número complexo $z = \dfrac{1+ai}{a-i}$, onde a é um número real e i é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. O valor de z^{2016} é igual a

a) a^{2016}

b) 1.

c) $1+2016i$.

d) i.

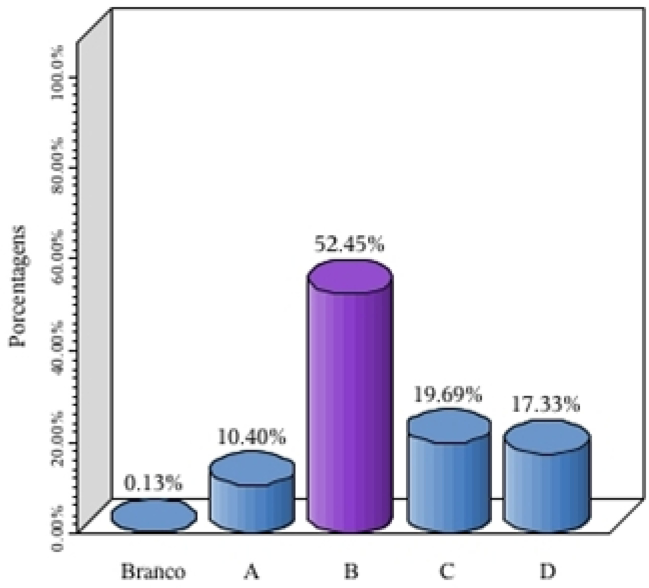
Objetivo da Questão

Efetuar a divisão de dois números complexos e manipular potências.

Alternativa Correta: **b**

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, obtemos $z = \frac{1+ai}{a-i} = \frac{1+ai}{a-i} \times \frac{a+i}{a+i} = \frac{a+i+a^2i+ai^2}{a^2+ai-ai-i^2} = \frac{a+i+a^2i-a}{a^2+1} = \frac{i(a^2+1)}{a^2+1} = i$. Logo, $z^{2016} = i^{2016} = (i^2)^{1008} = (-1)^{1008} = 1$.

Desempenho dos candidatos



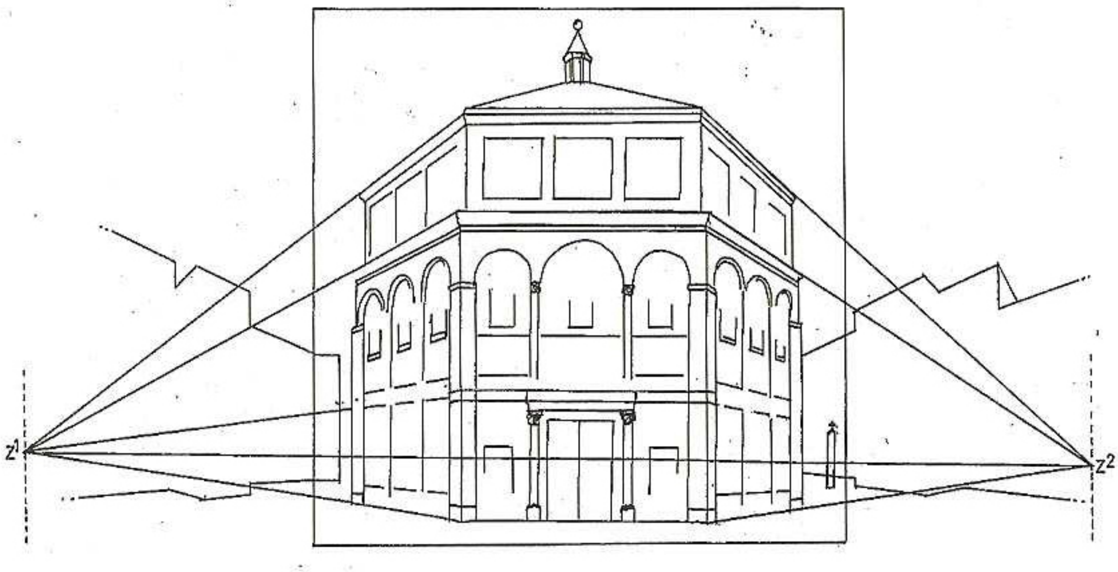
Comentários Gerais

A resolução da questão é simples, envolvendo apenas o uso do conjugado complexo para simplificar uma divisão e o conhecimento das regras de potenciação.

1ª Fase • Matemática

Questão 55 (Interdisciplinar)

A teoria da perspectiva, iniciada com o arquiteto Filippo Bruneleschi (1377-1446), utilizou conhecimentos geométricos e matemáticos na representação artística produzida na época. A figura a seguir ilustra o estudo da perspectiva em uma obra desse arquiteto. É correto afirmar que, a partir do Renascimento, a teoria da perspectiva



a) foi aplicada nas artes e na arquitetura, com o uso de proporções harmônicas, o que privilegiou o domínio técnico e restringiu a capacidade criativa dos artistas.

b) evidencia, em sua aplicação nas artes e na arquitetura, que as regras geométricas e de proporcionalidade auxiliam a percepção tridimensional e podem ser ensinadas, aprendidas e difundidas.

c) fez com que a matemática fosse considerada uma arte em que apenas pessoas excepcionais poderiam usar geometria e proporções em seus ofícios.

d) separou arte e ciência, tornando a matemática uma ferramenta apenas instrumental, porque essa teoria não reconhece as proporções humanas como base de medida universal.

Objetivo da Questão

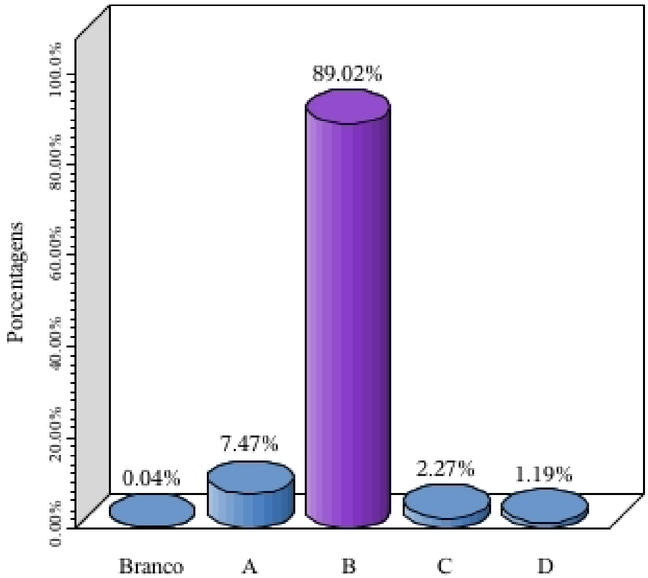
Avaliar o conhecimento histórico sobre o Renascimento e a introdução de uma técnica artística e arquitetônica, a perspectiva, intimamente relacionada com a Matemática.

Alternativa Correta: **b**

Na alternativa **a**, está errada a afirmação de que a teoria da perspectiva restringiu a capacidade de criação dos artistas. De maneira análoga, na alternativa **c** o erro é afirmar que apenas pessoas excepcionais poderiam usar geometria e proporções. Na alternativa **d**, tudo o que se afirma é exatamente o oposto do correto.

1ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos



Comentários Gerais

Como pode ser observado no gráfico acima, a questão teve uma alta porcentagem de acertos, identificando-se como uma questão considerada fácil pelos candidatos.