2ª Fase • Matemática

UNICAMP vestibular 2016

Introdução

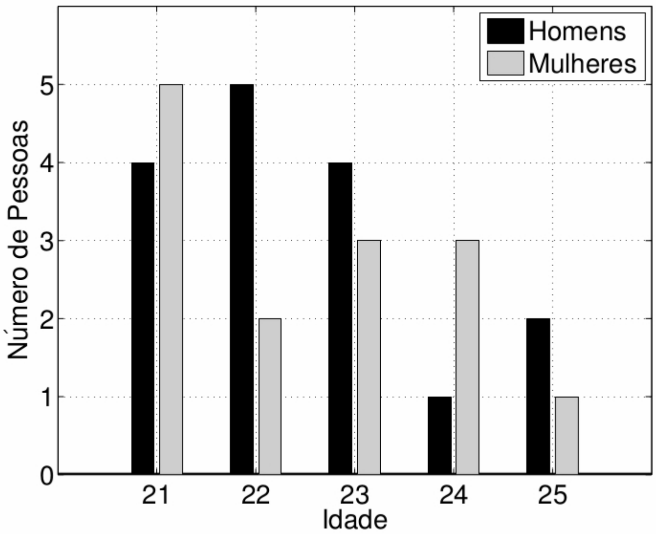
A prova de Matemática procura identificar nos candidatos um conhecimento crítico e integrado do conteúdo apresentado no ensino fundamental e médio. A leitura atenta dos enunciados das questões, a formulação correta dos problemas e a apresentação de respostas claras são indispensáveis para o sucesso do candidato. As questões de Matemática aplicadas na segunda fase do Vestibular 2016 foram originais, com enunciados claros e objetivos, tendo cada questão focalizado mais de um tópico do programa, no intuito de integrar conhecimentos.

A média geral de desempenho dos candidatos na prova de Matemática foi igual a 10,3 pontos, de um total de 24 pontos, com um desvio padrão de 6,7 pontos. Esses resultados caracterizam um grau médio de dificuldade da prova, o que é desejável para uma seleção adequada.

A seguir, para cada questão aplicada, apresentamos o enunciado, os objetivos, uma resolução detalhada e uma análise do desempenho dos candidatos. Além disso, fazemos alguns comentários gerais, visando a um melhor aproveitamento deste material.

Questão 7

O gráfico de barras abaixo exibe a distribuição da idade de um grupo de pessoas.



a) Mostre que, nesse grupo, a média de idade dos homens é igual à média de idade das mulheres.

b) Escolhendo ao acaso um homem e uma mulher desse grupo, determine a probabilidade de que a soma de suas idades seja igual a 49 anos.

Objetivo da Questão

Através da interpretação de um gráfico de barras envolvendo dois tipos de informação, pretendemos avaliar noções básicas de contagem e probabilidade, e cálculo de média aritmética ponderada.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Da análise do gráfico, a média de idade dos homens, I_H, é igual a

$$I_H = \frac{4\times 21 + 5\times 22 + 4\times 23 + 1\times 24 + 2\times 25}{4+5+4+1+2} = \frac{360}{16} = 22{,}5$$

e a das mulheres, I_M, é igual a

$$I_M = \frac{5 \times 21 + 2 \times 22 + 3 \times 23 + 3 \times 24 + 1 \times 25}{5 + 2 + 3 + 3 + 1} = \frac{315}{14} = 22{,}5.$$

Portanto, $I_H = I_M$.

b) **(2 pontos)**
Para que a soma das idades seja igual a 49 anos, as únicas possibilidades são: a escolha de um homem de 24 anos e uma mulher de 25 anos, ou a de um homem de 25 anos e uma mulher de 24 anos. Observe que temos apenas uma maneira de escolher um homem de 24 anos e uma mulher de 25 anos. Para a escolha de um homem de 25 anos, temos duas possibilidades e, para cada uma delas, temos três possibilidades para escolher uma mulher de 24 anos. Portanto, temos $2 \times 3 = 6$ possíveis escolhas para esse par. No total, temos $1 + 6 = 7$ possibilidades para que o par tenha a soma das idades igual a 49 anos. O total de pares possíveis é igual a 16×14. Assim, a probabilidade requerida é dada por $\frac{7}{16\times14} = \frac{1}{32}$.

Outra maneira de resolver a questão é considerar os únicos eventos possíveis que levam a uma soma das idades igual a 49 anos: escolher um homem de 24 anos e uma mulher de 25 anos, cuja probabilidade é dada por $\frac{1}{16} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{224}$, ou escolher um homem de 25 anos e uma mulher de 24 anos, cuja probabilidade é dada por $\frac{2}{16} \times \frac{3}{14} = \frac{6}{224}$. Como esses dois eventos são excludentes, a probabilidade requerida é dada pela soma das probabilidades anteriores $\frac{1}{224} + \frac{6}{224} = \frac{7}{224} = \frac{1}{32}$.

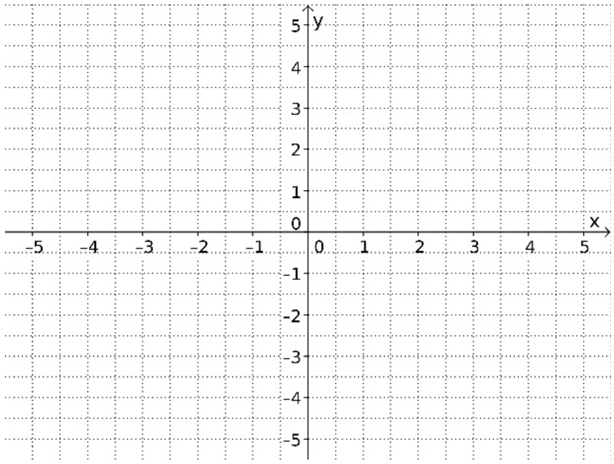
Desempenho dos candidatos
A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 2,6, com um desvio padrão de 1,4.

Comentários Gerais
Das seis questões da prova, essa foi a que apresentou a maior média, um resultado esperado para a questão de abertura do exame de Matemática.

Questão 8
Considere a função $f(x) = |2x - 4| + x - 5$, definida para todo número real x.

a) Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no plano cartesiano para $-4 \leq x \leq 4$.

b) Determine os valores dos números reais a e b para os quais a equação $\log_a(x + b) = f(x)$ admite como soluções $x_1 = -1$ e $x_2 = 6$.



2ª Fase • Matemática

Objetivo da Questão

Nessa questão os candidatos deveriam manipular uma função envolvendo a definição de módulo de um número real e traçar seu gráfico, que resulta na representação de uma função poligonal. A questão aborda também a aplicação do conceito de logaritmo na resolução de uma equação.

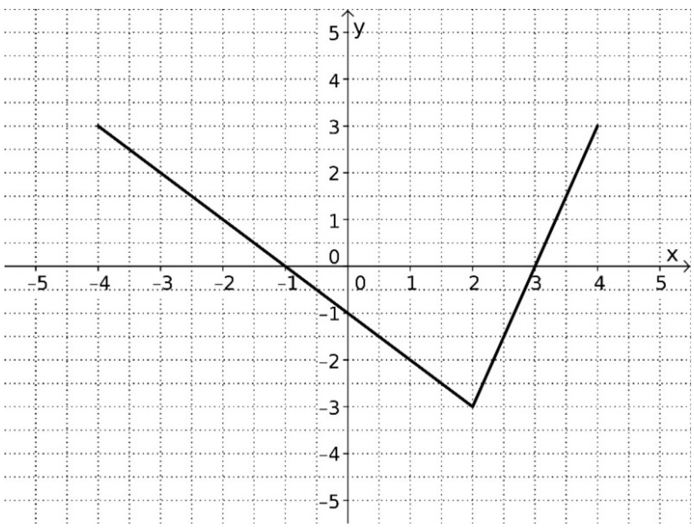
Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

A função módulo é definida por $|t| = -t$ se $t < 0$ e $|t| = t$ se $t \geq 0$, para todo número real t. Assim, a função f pode ser escrita como

$$f(x) = \begin{cases} -(2x-4)+x-5 \text{ se } 2x-4<0, \\ (2x-4)+x-5 \text{ se } 2x-4\geq 0, \end{cases} = \begin{cases} -2x+4+x-5 \text{ se } 2x<4, \\ 2x-4+x-5 \text{ se } 2x\geq 4, \end{cases} = \begin{cases} -x-1 \text{ se } x<2, \\ 3x-9 \text{ se } x\geq 2. \end{cases}$$

Portanto, o gráfico da função f é dado pela união do gráfico de duas funções afins, uma definida para $x < 2$ e outra definida para $x \geq 2$. O gráfico da função f, para $-4 \leq x \leq 4$**,** está esboçado abaixo.



b) **(2 pontos)**

Primeiramente, determinamos $f(-1) = |-2-4| - 1 - 5 = |-6| - 6 = 6 - 6 = 0$ e $f(6) = |12-4| + 6 - 5 = |8| + 1 = 8 + 1 = 9$. Daí, para $x = x_1 = -1$, temos que $\log_a(-1+b) = 0$ e, para $x = x_2 = 6$, temos que $\log_a(6+b) = 9$. Da definição de logaritmo, obtemos $a^0 = b - 1$ e $a^9 = b + 6$. Da primeira igualdade, como a não pode ser nulo, temos que $1 = b - 1$ e, portanto, $b = 2$. Substituindo esse resultado na segunda igualdade, obtemos $a^9 = 8$, ou seja, $a = 8^{\frac{1}{9}} = (2^3)^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{3}{9}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$. Portanto, os valores são $a = \sqrt[3]{2}$ e $b = 2$.

Desempenho dos candidatos

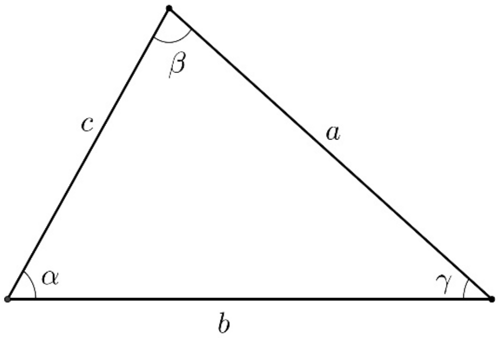
A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 1,9, com um desvio padrão de 1,7.

Comentários Gerais

Um erro comum observado nas respostas ao item **a** foi a apresentação do gráfico como uma linha não contínua e, em alguns casos, formada por segmentos não retilíneos.

Questão 9

Considere o triângulo exibido na figura abaixo, com lados de comprimentos a, b e c e ângulos α, β e γ.



a) Suponha que a sequência (α, β, γ) é uma progressão aritmética (PA). Determine a medida do ângulo β.

b) Suponha que a sequência (a, b, c) é uma progressão geométrica (PG) de razão $q = \sqrt{2}$. Determine o valor de $\tan \beta$.

Objetivo da Questão

Pertinente ao contexto de Geometria Plana, esta questão avalia propriedades básicas de triângulos, relacionadas à Trigonometria. Além disso, algumas condições impostas aos lados ou aos ângulos do triângulo envolvem noções de PA e PG, integrando tais conteúdos e apontando para diferentes correlações.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Como a sequência (α, β, γ) é uma PA, temos $\beta - \alpha = \gamma - \beta$, ou seja, $2\beta = \alpha + \gamma$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser igual a 180^o, temos que $180^o = \alpha + \beta + \gamma = \beta + (\alpha + \gamma) = \beta + 2\beta = 3\beta$. Logo, $3\beta = 180^o$, ou seja, $\beta = 60^o$.

b) **(2 pontos)**

Como a sequência (a, b, c) é uma PG de razão $q = \sqrt{2}$, temos que $b = aq = \sqrt{2}a$ e $c = bq = \sqrt{2}\sqrt{2}a = 2a$. Aplicando a lei dos cossenos ao lado de comprimento b, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$, obtemos $2a^2 = a^2 + 4a^2 - 4a^2 \cos\beta$. Logo, $4a^2 \cos\beta = 3a^2$ e, como $a > 0$, temos que $\cos\beta = 3/4$. Como $\operatorname{sen}\beta > 0$, obtemos $\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - (\cos\beta)^2} = \sqrt{1 - (3/4)^2} = \sqrt{1 - 9/16} = \sqrt{7/16} = \sqrt{7}/4$. Logo, $\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{7}/4}{3/4} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Desempenho dos candidatos

A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 1,8, com um desvio padrão de 1,5.

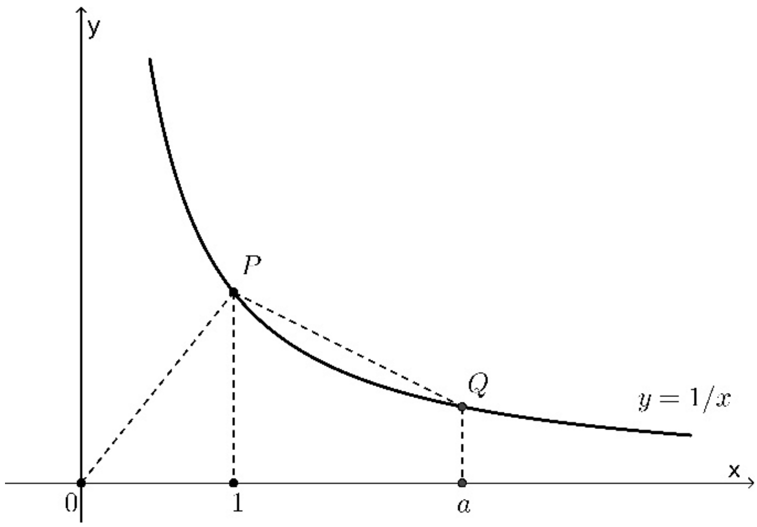
Comentários Gerais

Em relação ao item **a**, não foram observados erros significativos. No item **b**, a maior dificuldade foi a aplicação correta da lei dos cossenos.

2ª Fase • Matemática

Questão 10

A figura abaixo exibe o gráfico da função $f(x) = 1/x$, definida para todo número real $x > 0$. Os pontos P e Q têm abscissas $x = 1$ e $x = a$, respectivamente, onde a é um número real e $a > 1$.



a) Considere o quadrilátero T com vértices em $(0,0)$, P, Q e $(a, 0)$. Para $a = 2$, verifique que a área de T é igual ao quadrado da distância de P a Q.

b) Seja r a reta que passa pela origem e é ortogonal à reta que passa por P e Q. Determine o valor de a para o qual o ponto de intersecção da reta r com o gráfico da função f tem ordenada $y = a/2$.

Objetivo da Questão

Esta questão explora, no plano cartesiano, as representações de pontos (coordenadas) e de curvas (hipérbole), distância entre pontos e cálculo de área de polígonos. Além disso, aborda o conceito de inclinação de retas para determinar a intersecção entre uma reta e a hipérbole.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Como os pontos P e Q estão sobre o gráfico de $y = f(x)$, temos que suas coordenadas são dadas por $P = (1, f(1)) = (1,1)$ e $Q = (a, f(a)) = (2, f(2)) = (2,1/2)$. A área A do quadrilátero T pode ser calculada pela soma das áreas de um triângulo e um trapézio. O triângulo tem vértices em $(0,0)$, $(1,0)$ e $P = (1,1)$; logo sua área é $A_1 = \frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$. O trapézio tem vértices em $(1,0)$, $P = (1,1)$, $Q = (2,1/2)$ e $(a, 0) = (2,0)$; portanto sua área é $A_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{2-1}{2} = \frac{3}{4}$. Assim, $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Agora, o quadrado da distância entre $P = (1,1)$ e $Q = (2,1/2)$ é dado por $D = (1-2)^2 + (1-1/2)^2 = 1^2 + (1/2)^2 = 1 + 1/4 = 5/4$. Portanto, $A = D$.

b) **(2 pontos)**

A reta que passa por $P = (1,1)$ e $Q = (a, 1/a)$ tem inclinação igual a $m = \frac{\frac{1}{a}-1}{a-1} = \frac{1-a}{a(a-1)} = -\frac{1}{a}$. Como a reta r é perpendicular a essa reta, sua inclinação deve ser igual a $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{1}{a}} = a$. Assim, uma vez que r passa pela origem $O = (0,0)$ e tem inclinação a, sua equação cartesiana é dada por $\frac{y-0}{x-0} = a$, ou seja, $y = ax$. No ponto de intersecção de r com o gráfico de f, devemos ter as igualdades $y = ax = 1/x = a/2$. Como $a \neq 0$, de $ax = a/2$ obtemos $x = 1/2$ e, substituindo em $1/x = ax$, obtemos $a = 4$.

2ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos

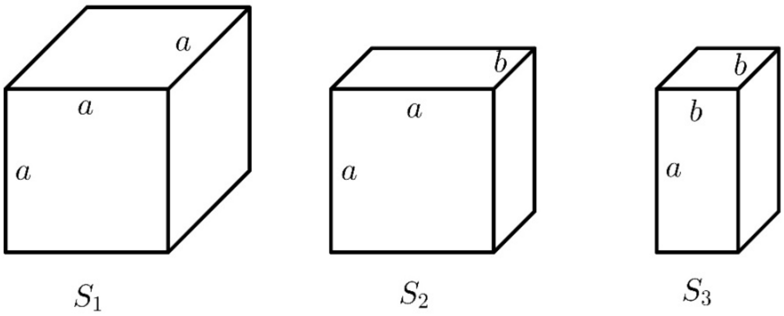
A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 1,5, com um desvio padrão de 1,2.

Comentários Gerais

O item **a** envolvia apenas os cálculos da área de triângulos e da distância entre dois pontos, sem grandes problemas para os candidatos. Já o item **b** exigia maior habilidade, além do conhecimento da relação entre as inclinações de retas perpendiculares.

Questão 11

Considere os três sólidos exibidos na figura abaixo, um cubo e dois paralelepípedos retângulos, em que os comprimentos das arestas, a e b, são tais que $a > b > 0$.



a) Determine a razão $r = a/b$ para a qual o volume de S_1 é igual à soma dos volumes de S_2 e S_3.

b) Sabendo que a soma dos comprimentos de todas as arestas dos três sólidos é igual a $60\ cm$, determine a soma das áreas de superfície dos três sólidos.

Objetivo da Questão

A questão exige o conhecimento de fórmulas simples de área e volume de paralelepípedos. Apesar de ser, essencialmente, uma de Geometria Espacial, esse tema é combinado com a resolução de uma equação quadrática.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

Sendo V_1, V_2 e V_3 os volumes de S_1, S_2 e S_3, respectivamente, temos que $V_1 = a^3$, $V_2 = a^2b$ e $V_3 = ab^2$. De $V_1 = V_2 + V_3$ obtemos $a^3 = a^2b + ab^2$. Como $a > b > 0$, podemos dividir ambos os lados da igualdade por ab^2**,** obtendo a equação $r^2 = r + 1$, ou seja, $r^2 - r - 1 = 0$. O discriminante dessa equação quadrática é $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$, e,portanto, $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Como $r > 0$, a única solução é $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) **(2 pontos)**

Sendo L_1, L_2 e L_3 as somas dos comprimentos de todas as arestas de S_1, S_2 e S_3, respectivamente, temos que $L_1 = 12a$, $L_2 = 8a + 4b$ e $L_3 = 4a + 8b$. Logo, $L_1 + L_2 + L_3 = 12a + 8a + 4b + 4a + 8b = 24a + 12b = 12 \times (2a + b)$. Conforme o enunciado, $12 \times (2a + b) = 60\ cm$ e, portanto, $2a + b = 5\ cm$. Sendo A_1, A_2 e A_3 as áreas de superfície de S_1, S_2 e S_3, respectivamente, temos que $A_1 = 6a^2$, $A_2 = 2a^2 + 4ab$ e $A_3 = 2b^2 + 4ab$. Assim, $A_1 + A_2 + A_3 = 6a^2 + 2a^2 + 4ab + 2b^2 + 4ab = 8a^2 + 2b^2 + 8ab = 2 \times (4a^2 + 4ab + b^2) = 2 \times (2a + b)^2$. Usando o fato de que $2a + b = 5\ cm$, temos, finalmente, $A_1 + A_2 + A_3 = 2 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50\ cm^2$.

2ª Fase • Matemática

Desempenho dos candidatos

A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 1,6, com um desvio padrão de 1,2.

Comentários Gerais

A resolução da questão não apresenta grandes dificuldades. Os erros mais frequentes se concentraram no item **b**, por falta de habilidade dos candidatos em manipular expressões algébricas de forma adequada.

Questão 12

Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 - 3x + a$, onde a é um número real.

a) No caso em que $p(1) = 0$, determine os valores de x para os quais a matriz A abaixo não é invertível.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a & 3 & x \end{bmatrix}$$

b) Seja b um número real não nulo e i a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. Se o número complexo $z = 2 + bi$ é uma raiz de $p(x)$, determine o valor de $|z|$.

Objetivo da Questão

A questão avalia, de forma integrada, conhecimentos sobre polinômios com coeficientes reais e suas raízes (reais ou complexas) e a análise de matrizes quadradas.

Resposta Esperada

a) **(2 pontos)**

A matriz A não é invertível (singular) se e somente se seu determinante é igual a zero. Computando o determinante de A, $\det(A) = x^3 + a + 0 - ax - 0 - 3x = x^3 - 3x + a$, observamos que ele é igual ao polinômio $p(x)$. Portanto, os valores de x para os quais a matriz A não é invertível são tais que $p(x) = 0$, ou seja, são as raízes de $p(x)$. Como $p(1) = 0$, já sabemos que $x = 1$ é um dos valores procurados e, mais ainda, temos que $1^3 - 3 \times 1 + a = 0$, ou seja, $a = 2$. Para determinar as outras raízes, fatoramos o polinômio $p(x)$ na forma $p(x) = (x-1)(rx^2 + sx + t)$, onde r, s e t são constantes reais a serem determinadas. Daí, $x^3 - 3x + 2 = rx^3 + (s-r)x^2 + (t-s)x - t$, ou seja, $r = 1$, $s - r = 0$, $t - s = -3$ e $-t = 2$. Portanto, $r = s = 1$ e $t = -2$. Devemos, então, determinar as raízes da equação $rx^2 + sx + t = x^2 + x - 2 = 0$. Como é uma equação quadrática, seu discriminante é igual a $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$ e, portanto, as soluções são $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ ou $x = \frac{-1-3}{2} = -2$. Concluindo, os valores de x para os quais a matriz A não é invertível são $x = -2$ ou $x = 1$.

b) **(2 pontos)**

Se o número complexo $z = 2 + bi$ é uma raiz de $p(x)$, então $p(z) = 0$. Assim, $p(z) = z^3 - 3z + a = (2+bi)^3 - 3 \times (a + bi) + a = 2^3 + 3 \times 2^2 \times (bi) + 3 \times 2 \times (bi)^2 + (bi)^3 - 6 - 3bi + a = 8 + 12bi - 6b^2 - b^3 i - 6 - 3bi + a = (2 - 6b^2 + a) + (9b - b^3)i$. Igualando essa expressão a zero, obtemos para a parte imaginária $9b - b^3 = b(9 - b^2) = 0$. Conforme o enunciado, $b \neq 0$ e, portanto, $b^2 = 9$. O módulo de z é, então, dado por $|z| = |2 + bi| = \sqrt{2^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

Desempenho dos candidatos

A nota média dos candidatos nessa questão foi igual a 0,9, com um desvio padrão de 1,2.

2ª Fase • Matemática

Comentários Gerais

Primeiramente, é importante destacar o uso do termo "matriz não invertível" no lugar do termo equivalente "matriz singular", mais comumente usado. Esta questão teve a menor média, o que era esperado, por ser a última questão da prova, além do fato de abordar os tópicos de polinômios e números complexos, temas que, em geral, não têm merecido muita ênfase no ensino médio.