RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

QUESTÃO 7

a)
A média de idade dos homens, I_H, é igual a

$$I_H = \frac{4 \times 21 + 5 \times 22 + 4 \times 23 + 1 \times 24 + 2 \times 25}{4 + 5 + 4 + 1 + 2} = \frac{360}{16} = 22{,}5$$

e a das mulheres, I_M, é igual a

$$I_M = \frac{5 \times 21 + 2 \times 22 + 3 \times 23 + 3 \times 24 + 1 \times 25}{5 + 2 + 3 + 3 + 1} = \frac{315}{14} = 22{,}5.$$

Portanto, $I_H = I_M$.

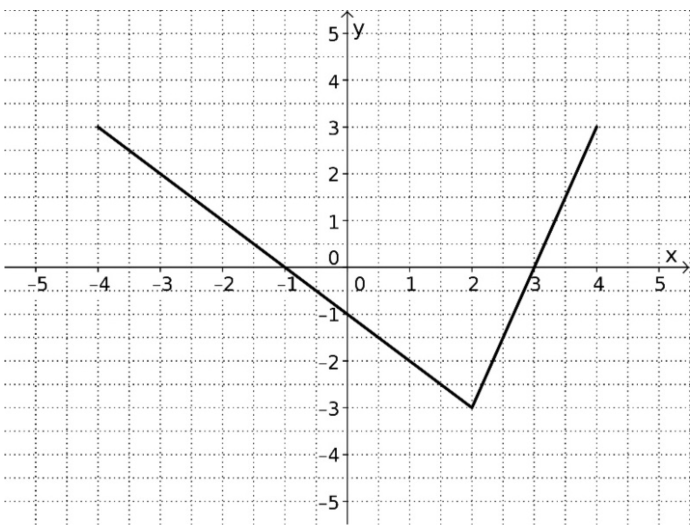
b)
Para que a soma das idades seja igual a 49 anos, as escolhas são: um homem de 24 anos e uma mulher de 25 anos, com $1 \times 1 = 1$ possibilidade, ou um homem de 25 anos e uma mulher de 24 anos, com $2 \times 3 = 6$ possibilidades. Temos então $1 + 6 = 7$ possibilidades e, como o total de pares possíveis é igual a 16×14, a probabilidade requerida é dada por $\frac{7}{16\times14} = \frac{1}{32}$.

QUESTÃO 8

a)
Da definição da função módulo, temos que a função f é dada por

$$f(x) = \begin{cases} -(2x-4)+x-5 \text{ se } 2x-4<0, \\ (2x-4)+x-5 \text{ se } 2x-4\geq 0, \end{cases} = \begin{cases} -2x+4+x-5 \text{ se } 2x<4, \\ 2x-4+x-5 \text{ se } 2x\geq 4, \end{cases} = \begin{cases} -x-1 \text{ se } x<2, \\ 3x-9 \text{ se } x\geq 2. \end{cases}$$

O gráfico da função f, para $-4 \leq x \leq 4$, está esboçado abaixo.



b)
Devemos ter que $\log_a(-1 + b) = f(-1) = 0$ e $\log_a(6 + b) = f(6) = 9$. Logo, $a^0 = b - 1$ e $a^9 = b + 6$. Da primeira igualdade, como $a \neq 0$, obtemos $1 = b - 1$, ou seja, $b = 2$, e, substituindo esse resultado na segunda igualdade, obtemos $a^9 = 8$, ou seja, $a = 8^{\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{2}$.

UNICAMP vestibular 2016

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

QUESTÃO 9

a)
Sendo (α, β, γ) uma PA, temos que $\beta - \alpha = \gamma - \beta$, ou seja, $2\beta = \alpha + \gamma$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser 180^o, temos que $180^o = \alpha + \beta + \gamma = 3\beta$, ou seja, $\beta = 60^o$.

b)
Sendo (a, b, c) uma PG de razão $q = \sqrt{2}$, temos que $b = aq = \sqrt{2}a$ e $c = bq = 2a$. Aplicando a lei dos cossenos ao lado de comprimento b, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, obtemos $2a^2 = a^2 + 4a^2 - 4a^2\cos\beta$, ou seja, $\cos\beta = 3/4$. Como $\operatorname{sen}\beta > 0$, temos $\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{1-(\cos\beta)^2}}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{7}/4}{3/4} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

QUESTÃO 10

a)
Temos que $P = (1, f(1)) = (1,1)$ e $Q = (a, f(a)) = (2, f(2)) = (2,1/2)$. A área A do quadrilátero T pode ser calculada pela soma das áreas de um triângulo e um trapézio. O triângulo tem vértices em (0,0), (1,0) e $P = (1,1)$; logo sua área é $A_1 = \frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$. O trapézio tem vértices em (1,0), $P = (1,1)$, $Q = (2,1/2)$ e $(a, 0) = (2,0)$; portanto sua área é $A_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{2-1}{2} = \frac{3}{4}$. Assim, $A = A_1 + A_2 = 5/4$ e, sendo o quadrado da distância entre P e Q dado por $D = (1-2)^2 + (1-1/2)^2 = 5/4$, concluímos que $A = D$.

b)
A reta que passa por $P = (1,1)$ e $Q = (a, 1/a)$ tem inclinação igual a $m = \frac{\frac{1}{a}-1}{a-1} = -\frac{1}{a}$ e, como a reta r é perpendicular a ela, sua inclinação deve ser igual a $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{1}{a}} = a$. Assim, a reta r passa pela origem $O = (0,0)$ e tem inclinação a e sua equação cartesiana é então dada por $\frac{y-0}{x-0} = a$, ou seja, $y = ax$. No ponto de intersecção da reta r com o gráfico de f temos que $ax = 1/x = a/2$. Como $a \neq 0$, de $ax = a/2$ obtemos $x = 1/2$ e, de $1/x = ax$, obtemos $a = 4$.

QUESTÃO 11

a)
Sendo V_1, V_2 e V_3 os volumes de S_1, S_2 e S_3, respectivamente, temos que $V_1 = a^3$, $V_2 = a^2b$ e $V_3 = ab^2$. De $V_1 = V_2 + V_3$ obtemos $a^3 = a^2b + ab^2$. Como $a > b > 0$, podemos dividir ambos os lados da equação por ab^2 e obtemos $r^2 = r + 1$, ou seja, $r^2 - r - 1 = 0$. O discriminante dessa equação quadrática é $\Delta = 1 + 4 = 5$, e portanto, $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Como $r > 0$, a única solução é $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b)
Sendo L_1, L_2 e L_3 as somas dos comprimentos de todas as arestas de S_1, S_2 e S_3, respectivamente, temos que $L_1 = 12a$, $L_2 = 8a + 4b$ e $L_3 = 4a + 8b$. Logo, $L_1 + L_2 + L_3 = 12a + 8a + 4b + 4a + 8b = 24a + 12b = 12(2a + b)$. Logo, $12 \times (2a + b) = 60\ cm$ e, portanto, $2a + b = 5\ cm$. Sendo A_1, A_2 e A_3 as áreas de superfície de S_1, S_2 e S_3, respectivamente, temos que $A_1 = 6a^2$, $A_2 = 2a^2 + 4ab$ e $A_3 = 2b^2 + 4ab$. Assim, $A_1 + A_2 + A_3 = 6a^2 + 2a^2 + 4ab + 2b^2 + 4ab = 8a^2 + 2b^2 + 8ab = 2(4a^2 + 4ab + b^2) = 2(2a + b)^2$. Como $2a + b = 5\ cm$, temos finalmente que $A_1 + A_2 + A_3 = 2 \times 5^2 = 50\ cm^2$.

QUESTÃO 12

a)
A matriz A não é invertível se e somente se seu determinante é igual a zero. Assim, $\det(A) = x^3 + a + 0 - ax - 0 - 3x = x^3 - 3x + a$, que é igual ao polinômio $p(x)$. Portanto, a matriz A não é invertível para os valores de x iguais às raízes de $p(x)$. Como $p(1) = 0$, já sabemos que $x = 1$ é um dos valores procurados e, mais ainda, temos que $1^3 - 3 \times 1 + a = 0$, ou seja, $a = 2$. Para determinar as outras raízes, dividimos

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

$p(x)$ por $(x-1)$ e obtemos a fatoração $p(x)=(x-1)(x^2+x-2)$. Resolvendo a equação quadrática $x^2+x-2=0$, obtemos $x=1$ ou $x=-2$. Portanto, os valores de x para os quais a matriz A não é invertível são $x=-2$ ou $x=1$.

b)
Temos que $p(z)=p(2+bi)=0$, ou seja, $z^3-3z+a=(2+bi)^3-3\times(2+bi)+a=8+12bi-6b^2-b^3i-6-3bi+a=(2-6b^2+a)+(9b-b^3)i=0$. Igualando a parte imaginária, obtemos $9b-b^3=b(9-b^2)=0$. Do enunciado, $b\neq 0$ e, portanto, $b^2=9$. Assim, $|z|=|2+bi|=\sqrt{2^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.